ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 2 :: Oktober 1922

:: Heft 5 :: Seite 325 bis 408

INHALT:



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 | Ende Oktober 1922 | Heft 5

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn.

Von **C. WIESELSBERGER** in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit untersucht auf den Grundlagen der von L. Prandtl begründeten Tragflügeltheorie[1]) das Problem des Fluges in einer Kreisbahn.

1. Einleitung und Zusammenfassung der Ergebnisse. Ein horizontal liegender Flügel bewege sich so, daß der Flügelmittelpunkt einen Kreis beschreibt, dessen Ebene ebenfalls horizontal liegt; die Querachse des Flügels sei stets radial gerichtet. Infolge der Kreisbewegung ist die Luftgeschwindigkeit relativ zum Flügel auf der äußeren Flügelhälfte größer, auf der inneren kleiner als in der Mitte. Die äußeren Flügelelemente erfahren dadurch einen größeren Auftrieb als die entsprechenden inneren. Die Verteilung des Auftriebes über die Spannweite des Flügels wird dadurch unsymmetrisch in bezug auf die Flügelmitte. Nehmen wir an, daß bei gerader Flugbahn der Auftrieb und damit auch die Zirkulation elliptisch über die Spannweite verteilt ist, so ließe sich bei gekrümmter Flugbahn die Zirkulation eines jeden Flügelelementes in der Weise ermitteln, daß die symmetrische Verteilung der Zirkulation, die dem geraden Fluge entspricht, durch eine andere ersetzt wird, wobei für jedes Flügelelement eine Geschwindigkeit eingesetzt wird, die es gemäß seiner Entfernung vom Mittelpunkt der gekrümmten Flugbahn hat. Die Zirkulation, die die Dimension Geschwindigkeit $\times$ Länge hat, ändert sich dabei proportional der Geschwindigkeit.

Diese Betrachtungsweise berücksichtigt nicht den Umstand, daß das gemäß der Tragflügeltheorie von der Hinterkante des Flügels ausgehende Wirbelband, dessen Gestalt in unserem Fall ringförmig ist, eine Rückwirkung auf den Flügel derart ausüben kann, daß die Verteilung der Zirkulation geändert wird. Untersucht man diese Rückwirkung näher, indem man die von dem Wirbelbande herrührenden Störungsgeschwindigkeiten am Orte des Flügels berechnet, so zeigt sich, daß die wirkliche Verteilung der Zirkulation von der symmetrischen Form weniger abweicht, als nach der elementaren Auffassung

[1]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, 1. u. 2 Mitteilg., Nachrichten d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Math.-Phys. Klasse 1918/19.

zu erwarten wäre. Das Wirbelband wirkt im Sinne einer Abschwächung, deren Größe durch eine dimensionslose Zahl β, die stets kleiner als 1 ist, zum Ausdruck gebracht wird und die in unserem Falle nur von dem Achsenverhältnis des den Betrachtungen zugrunde gelegten elliptisch umrissenen Flügels abhängt. Nach Bestimmung des Wertes von β werden zunächst Auftrieb und Widerstand des Flügels bei der kreisförmigen Bewegung ermittelt und deren Aenderung gegenüber der geradlinigen Bewegung festgestellt. Hierauf wird das Moment um die Längsachse (Quermoment) sowie das Moment um die vertikale Achse (Seitenmoment) berechnet.

Die analytische Behandlung eines Flügels mit durchgehender linearer Verwindung (ohne Unstetigkeitsstelle in der Mitte) ist dem vorstehenden Problem verwandt und wird im Anschluß an dieses hier durchgeführt werden.

Schließlich werden die für den Flug auf der Kreisbahn berechneten Werte von β durch Messung des Quermomentes an einem Rundlauf geprüft. Aus der Größe des Quermomentes läßt sich β in einfacher Weise ableiten. Der gemessene Wert von $\beta + 1$ ist um rd. 5,5 vH kleiner als der theoretische. Die mutmaßlichen Ursachen für diesen Unterschied werden angegeben.

2. Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes in der Umgebung eines kreisförmigen Wirbels. Für die folgende Untersuchung nehmen wir an, daß die Bewegung des Tragflügels auf einer kreisförmigen Bahn erfolge. Die Achse eines jeden von der Flügelhinterkante ausgehenden Wirbelfadens wird dann, wenn wir, wie in der Tragflügeltheorie, seine Eigenbewegung vernachlässigen, ebenfalls kreisförmig gekrümmt sein. Die Gesamtheit aller freien Wirbelfäden bildet daher, falls die »tragende Linie« (d. i. eine Linie, längs welcher man sich den Auftrieb konzentriert denkt) in der Ebene der Flugbahn liegt, ein ebenes kreisförmiges Wirbelband. Wir nehmen weiterhin an, daß noch kein voller Kreis durchflogen ist. Würde mehr als ein Vollkreis durchflogen, so würde das in nächster Nähe befindliche Wirbelband des vorigen Umlaufes eine starke Störung geben; deshalb wird dieser Fall ausgeschlossen. Es wird sich zeigen, daß die entfernteren Teile von geringer Wirkung sind, so daß der durchflogene Winkel nur geringen Einfluß hat. Der Berechnung wurde ein Wirbelband zugrunde gelegt, das sich in einer Länge vom halben Umfange der Kreisbahn unmittelbar an den Flügel anschließt.

Die erste Aufgabe besteht nun darin, das von einem Wirbelfaden von halbkreisförmiger Gestalt erzeugte Geschwindigkeitsfeld zu ermitteln. Nehmen wir an, daß die Ebene des Flügels mit der Ebene des Wirbelsystems zusammenfällt, d. h. daß der Flügel die Kreisbahn ohne Schräglage durchfliegt, so genügt es, wenn die Störungsgeschwindigkeiten in der durch den Halbkreis bestimmten Ebene bekannt sind, da die tragende Linie auch in dieser Ebene liegt. Die Richtung der Störungsgeschwindigkeiten ist überall senkrecht zu der genannten Ebene. Wir betrachten einen halbkreisförmigen Wirbelfaden vom Radius R, um welchen überall die Zirkulation Γ herrscht (Abb. 1). Ein beliebiger Punkt P in der Ebene des Halbkreises, für welchen die Störungsgeschwindigkeit bestimmt werden soll, sei hier durch die Größen r und α gekennzeichnet. Der im Punkte P von einem Wirbelelement von der Länge ds erzeugte Betrag dw der Störungsgeschwindigkeit ist nach dem Biot-Savartschen Gesetz:

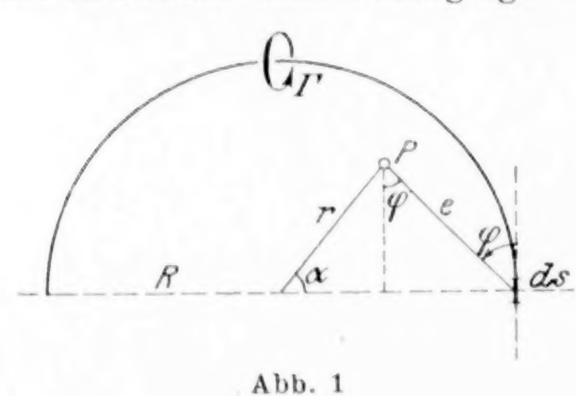


Abb. 1

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \varphi \, ds}{e^2},$$

wenn e die Entfernung des Punktes P von dem Wirbelelement ds und φ den Winkel dieser Richtung mit der Richtung von ds bedeutet. Durch die bekannten Größen R, r und α ausgedrückt ist

$$e^2 = r^2 \sin^2 \alpha + (R - r \cos \alpha)^2, \qquad \sin \varphi = \frac{R - r \cos \alpha}{e}, \qquad ds = R \, d\alpha,$$

so daß man für dw erhält:

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(R - r \cos \alpha) R \, d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2 R r \cos \alpha)^{3/2}}.$$

Die resultierende Geschwindigkeit w im Punkte P wird daher durch das über den Halbkreis erstreckte Integral zum Ausdruck gebracht:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R(R - r\cos\alpha)\, d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha)^{3/2}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $R^2 + r^2 = p^2$ und $2Rr = q^2$, so ist

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{p^2 - q^2\cos\alpha}^3} - Rr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{p^2 - q^2\cos\alpha}^3}\right).$$

Diese Integrale sind vom elliptischen Typus. Bezeichnet man mit K' und E' die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so ist

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left[\frac{2R^2}{\sqrt{p^2 + q^2}}\frac{1}{p^2 - q^2}\,\mathsf{E}'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) - Rr\left(\frac{2p^2}{q^2\sqrt{p^2 + q^2}\,(p^2 - q^2)}\right)\mathsf{E}'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{2}{q^2\sqrt{p^2 + q^2}}\,\mathsf{K}'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)\right].$$

Hieraus läßt sich die Störungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der Halbkreisebene angeben, da die Werte von K' und E' für verschiedene Werte des Moduls $k = \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ aus den vorhandenen Zahlentafeln für elliptische Integrale entnommen werden können. Für unsere Zwecke ist jedoch diese Form des Resultates ungeeignet, denn für die weitere Behandlung des Problems ist es erforderlich, daß der Ausdruck für w in einer geschlossenen Form sich darstellt, damit wir später eine noch nötige Integration ausführen können. Dies wird erreicht, wenn wir K' und E' in Reihen entwickeln. Für die Konvergenz dieser Reihen ist es vorteilhaft, wenn wir K' und E' durch die komplementären elliptischen Integrale K und E ausdrücken, indem wir den Modul k durch den komplementären Modul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ersetzen. Es ist dann

$$\mathsf{K}'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{K}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{K}\left(\sqrt{1 - k^2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \mathsf{E}'\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{E}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \mathsf{E}\left(\sqrt{1 - k^2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Die vollständigen elliptischen Integrale K und E lassen sich nach Legendre[1]) durch folgende Reihen darstellen:

$$\mathsf{K}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{4}{k'} + \frac{1^2}{2^2}k'^2\left(\ln\frac{4}{k'} - 1\right) + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k'^4\left(\ln\frac{4}{k'} - 1 - \frac{2}{3\cdot 4}\right) + \ldots$$

$$\mathsf{E}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 1 + {}^1/_2\, k'^2\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{1}{1\cdot 2}\right) + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4}\,k'^4\left(\ln\frac{4}{k'} - 1 - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \ldots$$

Gemäß Obigem ist $k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}}$ oder wenn wir für p und q die Werte einsetzen:

$$k' = \frac{R - r}{R + r}.$$

Für den Fall, daß wir die Störungsgeschwindigkeit nur in solchen Punkten ins Auge fassen, deren Entfernung vom Wirbelfaden sehr klein ist gegenüber dem Radius der Flugbahn, d. h. wenn r und R nur wenig voneinander verschieden sind, wird der Wert von $\frac{4Rr}{(R + r)^2}$ nahe bei 1 liegen. k' wird dann eine kleine Zahl werden, deren Quadrate wir vernachlässigen können, so daß wir von den beiden Reihen für K und E nur das erste Glied zu berücksichtigen haben, da im zweiten Gliede k' bereits in quadratischer Form auftritt. Es ergibt sich somit:

$$\mathsf{K}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{4}{k'}, \qquad \mathsf{E}\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

---

[1]) Siehe Legendre, Traité des fonct. ellipt., Paris 1825.

Mit Benutzung **dieser** Werte lautet nun der **Ausdruck für die Störungsgeschwindigkeit**:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{2R^2}{p^2 - q^2\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{2p^2 R r}{q^2\sqrt{p^2+q^2}\,p^2 - q^2} + \frac{2Rr}{q^2\sqrt{p^2+q^2}}\ln\frac{4}{\sqrt{1-k'}}\right).$$

Führt man für p und q **ihre Werte ein, so vereinfacht** sich **der Ausdruck auf**:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{R+r}\ln\frac{4(R+r)}{R-r}\right).$$

Wir führen ferner an Stelle der Variablen r die Variable x ein, **welche die** Entfernung des Aufpunktes vom **Wirbelfaden** darstellt, **indem** man $R - r = x$ setzt. Dann **ergibt** sich:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2R-x}\ln\frac{4(2R-x)}{x}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Der zweite Summand **dieses Ausdruckes läßt** sich **noch weiter reduzieren; da** R **gegen** die übrigen **Längen groß** ist, so **halten wir es für zulässig, daß** Glieder **mit dem** Faktor $\frac{1}{R^2}$ vernachlässigt werden. Den ersten Faktor **des zweiten** Summanden **können** wir wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{2R-x} = \frac{1}{2R}\left(1 - \frac{x}{2R}\right)^{-1}.$$

Entwickelt man den Klammerdruck binomisch, so ergibt sich

$$\frac{1}{2R-x} = \frac{1}{2R}\left(1 + \frac{x}{2R} + \ldots\right), \qquad = \frac{1}{2R} + \frac{x}{4R^2} + \ldots$$

oder mit der oben für zulässig erklärten Vernachlässigung der Glieder mit dem Faktor $\frac{1}{R^2}$:

$$\frac{1}{2R-x} \sim \frac{1}{2R}.$$

Den **auf** diese Weise **erhaltenen zweiten** Summanden **formen** wir in **folgender** Weise um:

$$\frac{1}{2R}\ln\frac{4(2R-x)}{x} = \frac{1}{2R}\left(\ln 4 + \ln\frac{2R}{x}\left(1 - \frac{x}{2R}\right)\right) = \frac{1}{2R}\left(\left(\ln 4 + \ln\frac{2R}{x}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{2R}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2R}\left(\left(\ln 4 + \ln\frac{2R}{x}\right) - \left(\frac{x}{2R} + \frac{x^2}{8R^2} + \ldots\right)\right).$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern **der** Ordnung $\frac{1}{R^2}$ **gibt dies**:

$$\sim \frac{1}{2R}\left(\ln\frac{R}{x} + \ln 8\right).$$

Für **die** Störungsgeschwindigkeit w **erhalten** wir **nun endgültig den** Näherungswert:

$$w = \frac{\Gamma}{4R}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2R}\left(\ln\frac{R}{x} + \ln 8\right)\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Es ist von Interesse, die Uebereinstimmung dieses Wertes der Störungsgeschwindigkeit mit der exakten Lösung kennen zu lernen, die sich durch strenge Berechnung der elliptischen Integrale ergibt. Diese lautet, wenn p und q durch R und x ausgedrückt werden:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{x}\,\mathsf{E}'\left(\frac{2\sqrt{R(R-x)}}{2R-x}\right) + \frac{1}{2R-x}\,\mathsf{K}'\left(\frac{2\sqrt{R(R-x)}}{2R-x}\right)\right).$$

Nach dieser Gleichung wurde für einen angenommenen Fall der exakte Wert von w für verschiedene Werte von x mit Hilfe der Legendreschen Zahlentafeln der elliptischen Integrale berechnet. Dabei ist für $R = 1$ und $\frac{\Gamma}{4\pi} = 1$ gesetzt worden. Die so gewonnene strenge Verteilung der Störungsgeschwindigkeit über den Radius ist in Abb. 2 durch die ausgezogene Kurve dargestellt, während die Anwendung der Näherungsformel die gestrichelte Kurve ergibt. Man sieht daraus, daß für Werte von x, die klein sind im Vergleich zum Radius R der Flugbahn, die Störungsgeschwindigkeit durch die Näherungsformel mit für unsere Zwecke hinreichender Genauigkeit wiedergegeben wird.

3. Berechnung der Zirkulationsverteilung. Nachdem wir nun in den Stand gesetzt, die von einem kreisförmigen Wirbel bei gegebener Zirkulation erzeugte Störungsgeschwindigkeit in der Ebene desselben anzugeben, gehen wir dazu über, die Rück-

wirkung des vom Flügel ausgehenden halbkreisförmigen Wirbelsystems auf den Flügel selbst zu ermitteln. Diese Rückwirkung besteht, wie bereits im ersten Abschnitt angedeutet, darin, daß durch das System der abgehenden Wirbel am Orte des Flügels eine lotrecht nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit erzeugt wird, welche eine Veränderung des ursprünglichen Anstellwinkels längs der Spannweite und damit auch eine Veränderung der Auftriebsverteilung bewirkt. Es kommt nun hier darauf an, die tatsächliche Auftriebsverteilung zu bestimmen. Sobald diese bekannt ist, lassen sich alle für den Flug in der Kurve wichtigen Größen berechnen.

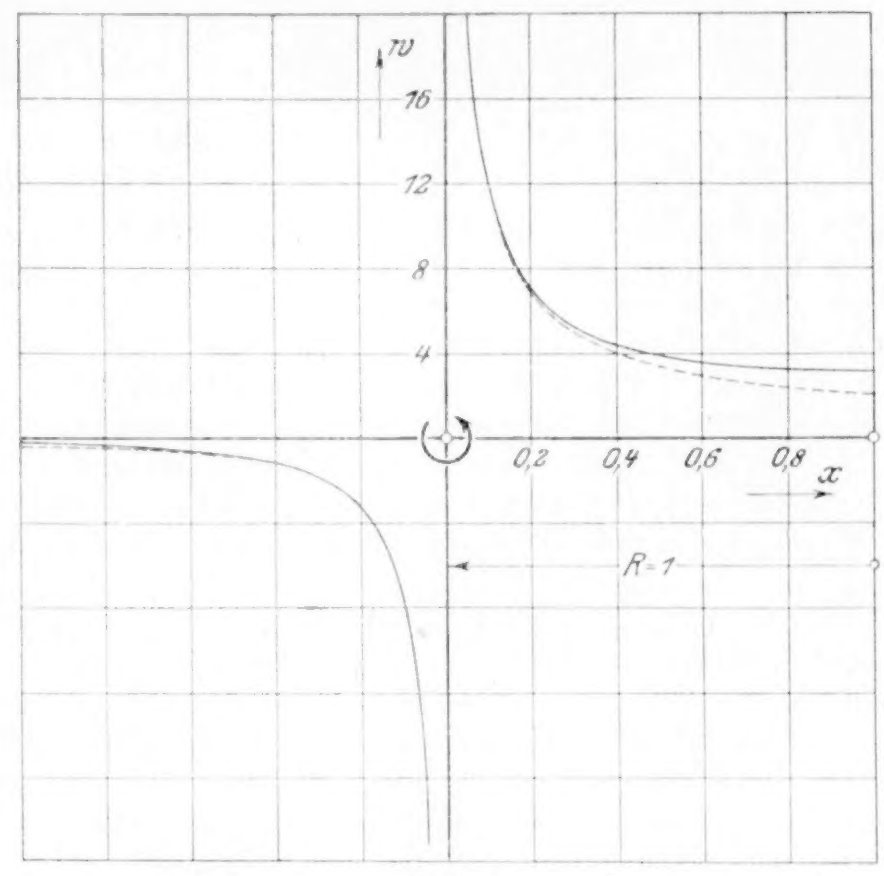


Abb. 2

Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir in der Weise vor, daß wir eine geeignet erscheinende unsymmetrische Auftriebsverteilung annehmen und zusehen, ob sie unseren Forderungen genügt. Die Verfolgung des direkten Weges würde erheblich größere Schwierigkeiten bieten. Es wird angenommen, daß beim geraden Flug der Auftrieb und damit auch die Zirkulation elliptisch über die Spannweite des Flügels verteilt ist. Dies wird durch die Gleichung

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$$

zum Ausdruck gebracht wird, wenn Γ_0 die Zirkulation in der Mitte des Flügels, l die halbe Flügelspannweite und Γ die Zirkulation im Abstand x von der Flügelmitte bedeuten. In der elementaren Theorie geht man von der Tatsache aus, daß diejenigen Flügelelemente, welche größeren Abstand vom Krümmungsmittelpunkt der Flugbahn haben, größere Geschwindigkeit relativ zur Luft besitzen, und zwar ist die Geschwindigkeit proportional dem Abstand des betreffenden Flügelelementes vom Mittelpunkt der Flugbahn. Dem entsprechend wird, da nach dem Joukowskyschen Satz die Zirkulation der Geschwindigkeit proportional ist, die Zirkulation proportional dem Abstand vom Mittelpunkt angenommen. Diese Verteilung würde durch die Gleichung

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \left(1 + \frac{x}{R}\right)$$

gekennzeichnet sein. Dieser Ansatz läßt indessen außer acht, daß durch die abgehenden Wirbel die Verteilung der Zirkulation infolge Aenderung des wirksamen Anstellwinkels der einzelnen Flügelelemente ebenfalls verändert wird. Dieser Aenderung der Verteilung der Zirkulation über die Spannweite tragen wir in der Weise Rechnung, daß wir das zweite Glied in der Klammer mit einem Zahlenfaktor β, den wir als »Einflußzahl« bezeichnen, versehen und demgemäß ansetzen:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \left(1 + \frac{\beta x}{R}\right) \qquad (4).$$

Die Einflußzahl β ist zunächst unbekannt; wir müssen sie, falls der gewählte Ansatz überhaupt zulässig ist, so bestimmen, daß sie mit den Bedingungen unseres Problems verträglich ist. Zu diesen Bedingungen gelangt man durch folgende Ueberlegung: Da sich unsere Betrachtungen auf einen unverwundenen Flügel erstrecken, so ist der Anstellwinkel α, d. h. der Winkel zwischen Flügelsehne und Bewegungsrichtung für jedes Flügelelement der gleiche. Nun setzt sich nach der Tragflügeltheorie der Anstellwinkel α aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus dem Anstellwinkel α', welcher unendlich großer Spannweite entspricht, und dem Winkel $\varphi = \frac{w}{v}$ infolge Veränderung der

Anströmungsrichtung durch die Wirkung des abgehenden Wirbelbandes, so daß man für den geometrischen Anstellwinkel erhält:

$$\alpha = \alpha' + \frac{w}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dieser Winkel muß längs der ganzen Spannweite konstant sein. Diese Forderung benutzen wir später zur Bestimmung des noch unbekannten Faktors β. Zunächst suchen wir die durch die angenommene Zirkulationsverteilung erzeugte Vertikalgeschwindigkeit zu ermitteln, da sich daraus der Neigungswinkel φ der anströmenden Luft ergibt. Zur Berechnung derselben greifen wir auf die durch Gl. (3) dargestellte Beziehung zurück. Diese läßt sich für die folgende Anwendung noch weiter vereinfachen. Wir sind bereits darüber unterrichtet, daß von der Flügelhinterkante ein aus infinitesimalen Wirbelfäden bestehendes Wirbelband ausgeht, das in unserem speziellen Falle ringförmige Gestalt hat. Jedem auf der tragenden Linie liegenden Aufpunkt lassen sich stets zwei Wirbel von gleicher Stärke, aber verschiedenem Drehsinn zuordnen. Die Wirbelstärke eines elementaren Wirbelstreifens ist wie wir wissen durch den Ausdruck $\frac{d\Gamma}{dx}dx$ gegeben. Bei einer beliebigen stetigen Zirkulationsverteilung (die an den Flügelenden mit senkrechter Tangente auf den Wert 0 geht) gibt es daher stets zwei Abszissen x_1 und x_2, für welche die Beziehung gilt: $d\Gamma_2 = -d\Gamma_1$. Die an diesen Stellen abgehenden Elementarwirbel sind also gleich stark, ihr Drehsinn ist aber entgegengesetzt. Für die Wirkung in einem Aufpunkte P mit der Abszisse x_0 kommt die Summe der Einzelwirbel in Betracht. Unter Beachtung von Gl. (3) ist daher

$$d\,w = \frac{1}{4\pi}\frac{d\Gamma}{dx}dx\left[\left(\frac{1}{x_1 - x_0} - \frac{1}{2R}\ln(x_1 - x_0) + \frac{1}{2R}\ln 8R\right) - \left(\frac{1}{x_2 - x_0} - \frac{1}{2R}\ln(x_2 - x_0) + \frac{1}{2R}\ln 8R\right)\right].$$

Man sieht, daß bei der Summierung der Wirkung zweier gleich starker Wirbelfäden das von x unabhängige Glied $\frac{1}{2R}\ln 8R$ wegfällt. Da dies für sämtliche Elementarwirbelpaare der Fall ist, so können wir für die folgende Integration dieses konstante Glied außer acht lassen. Bezeichnen wir von nun ab den Abstand eines Wirbelfadens von der Flügelmitte mit x, so ist die Vertikalgeschwindigkeit w im Aufpunkte P mit der Abszisse x_0:

$$w = \frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{+l}\frac{d\Gamma}{dx}\frac{x - x_0}{dx} - \frac{1}{8\pi R}\int_{-l}^{+l}\frac{d\Gamma}{dx}\ln(x - x_0)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Aus Gl. (4) ergibt sich $\frac{d\Gamma}{dx}$ zu:

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{\beta\Gamma_0}{R}\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} - \left(1 + \frac{\beta x}{R}\right)\frac{\Gamma_0 x}{l^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}}.$$

Für die Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich demnach, wenn wir wieder die Glieder mit $\frac{1}{R^2}$ vernachlässigen.

$$w(x_0) = \frac{\beta\Gamma_0}{4\pi R}\int_{-l}^{+l}\frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\,dx}{x - x_0} - \frac{\Gamma_0}{4\pi l^2}\int_{-l}^{+l}\frac{x\,dx}{(x - x_0)\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} - \frac{\beta\Gamma_0}{4\pi R l^2}\int_{-l}^{+l}\frac{x^2\,dx}{x - x_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}}$$
$$+ \frac{\Gamma_0}{8\pi R l^2}\int_{-l}^{+l}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}}\ln(x - x_0)\,dx.$$

Die Integration dieses Ausdruckes liefert:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4l}\left(1 + \frac{x_0}{R}(2\beta + 1/2)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Diese Art der Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit über die Spannweite ist für unser Problem zulässig, vorausgesetzt, daß der Bedingungsgleichung (5) genügt wird, nach welcher der geometrische Anstellwinkel zwischen Flügelsehne und Bewegungsrichtung für jeden Flügelquerschnitt der gleiche sein muß. Letzteres können wir dadurch erreichen, daß wir die noch unbestimmte Konstante β so bestimmen, daß Gl. (5) befriedigt wird. Wir setzen zu diesem Zwecke den Ausdruck für die Vertikalgeschwindigkeit Gl. (7) in Gl. (5) ein, wobei wir auch die Größen α', v und t durch die entsprechenden Ausdrücke ersetzen. t bedeutet die Flügeltiefe. Wir nehmen an, daß wir die in unserer Aufgabe angenommene elliptische Verteilung des Auftriebes durch einen Umriß des Flügels von elliptischer Form bei konstantem Anstellwinkel längs der ganzen Spannweite erreicht haben. Dann ist:

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$$

unter t_0 die Flügeltiefe in der Mitte des Flügels verstanden. Für α' läßt sich nach Kutta schreiben:

$$\alpha' = \frac{c_a}{2\pi} = \frac{\Gamma}{\pi t v}.$$

Die Größen Γ, t und v sind längs der Spannweite veränderlich. Drücken wir sie durch die Werte Γ_0, t_0 und v_0 in der Flügelmitte aus, so erhält man:

$$\alpha' = \frac{\Gamma_0 \left(1 + \frac{\beta x}{R}\right)}{\pi t_0 v_0 \left(1 + \frac{x}{R}\right)}, \qquad \text{Ferner ist:} \quad \frac{w}{v} = \frac{\Gamma_0 \left(1 + \frac{x}{R}(2\beta + {}^1/_2)\right)}{4 l v_0 \left(1 + \frac{x}{R}\right)}$$

eingesetzt in Gl. (5) liefert:

$$1 + \frac{\beta x}{R} + \frac{\pi t_0}{4l} + \frac{\pi t_0}{4l}\frac{2\beta x}{R} + \frac{\pi t_0}{4l}\frac{x}{2R} = \frac{\pi v_0 t_0 \alpha}{\Gamma_0} + \frac{\pi v_0 t_0 \alpha}{\Gamma_0}\frac{x}{R}.$$

Diese Gleichung muß für jeden Wert von x erfüllt sein. Dies ist nur möglich, wenn die Summe der mit x behafteten Glieder $= 0$ ist. Daher ergibt sich durch Vergleichung der Koeffizienten von x:

$$\beta + \frac{\pi t_0}{2l}\beta + \frac{\pi t_0}{8l} = \frac{\pi v_0 t_0 \alpha}{\Gamma_0}.$$

Setzt man noch $\Gamma_0 = \frac{c_a}{2} t_0 v_0$

und

$$\alpha = \frac{c_a}{2\pi} + \frac{c_a}{\pi}\frac{F}{4l^2} = \frac{c_a}{2\pi} + \frac{c_a t_0}{8l},$$

so erhält man für β den Ausdruck:

$$\beta = \frac{1 + \frac{\pi}{4}\frac{t_0}{l} - \frac{\pi}{8}\frac{t_0}{l}}{1 + \frac{\pi}{2}\frac{t_0}{l}}.$$

Schließlich wollen wir für das Achsenverhältnis $\frac{t_0}{2l}$ des elliptischen Flügelumrisses den Buchstaben λ einführen und erhalten dann:

$$\beta = \frac{1 + \frac{\pi}{4}\lambda}{1 + \pi\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Aus diesem Ergebnis ersieht man, daß der Wert von β nur von dem Achsenverhältnis des elliptischen Flügelumrisses abhängt. Der größte Wert, den β annehmen kann, ergibt sich für $\lambda = 0$ (d. h. für unendlich große Spannweite) zu $\beta = 1$. Für verschwindend kleine Spannweiten ($\lambda = \infty$) nähert sich β dem Werte ${}^1/_4$, denn es ist

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{1 + \frac{\pi}{4}\lambda}{1 + \pi\lambda} = {}^1/_4.$$

In der nachstehenden Zahlentafel sind die Werte von β für verschiedene Werte von λ berechnet.

$\lambda = \infty$	10	5	2	1	0,9	0,8	0,7
$\beta = 0{,}25$	0,273	0,295	0,353	0,431	0,447	0,464	0,484
$\lambda = 0{,}6$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0
$\beta = 0{,}511$	0,541	0,582	0,636	0,710	0,820	0,897	1,0

In Abb. 3 ist für einen angenommenen Fall die Verteilung der Zirkulation über die Spannweite zur Darstellung gebracht, wie sie sich auf Grund der Tragflächentheorie ergibt (ausgezogene Kurve). Die gestrichelte Kurve stellt die Zirkulationsverteilung dar, welche die elementare Theorie ohne Berücksichtigung des von der Hinterkante ausgehenden gekrümmten Wirbelbandes liefert.

4. Berechnung der Luftkräfte und Momente. In Abb. 4 sind die im allgemeinsten Fall auf einen Flügel wirkenden Luftkräfte und Momente zusammengestellt.

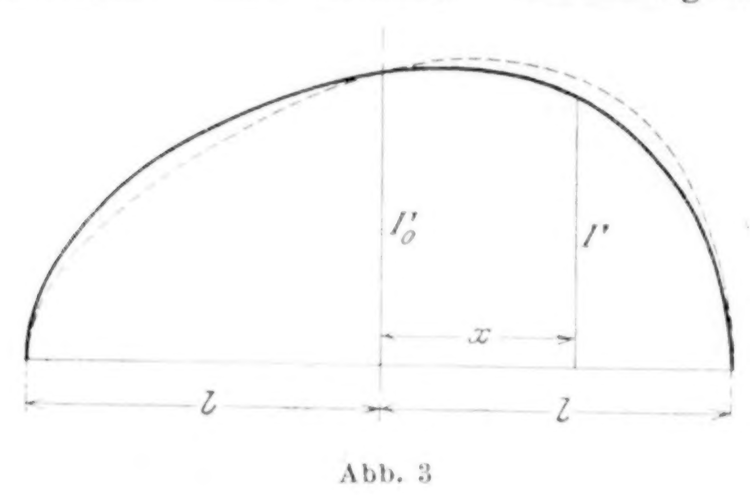


Abb. 3

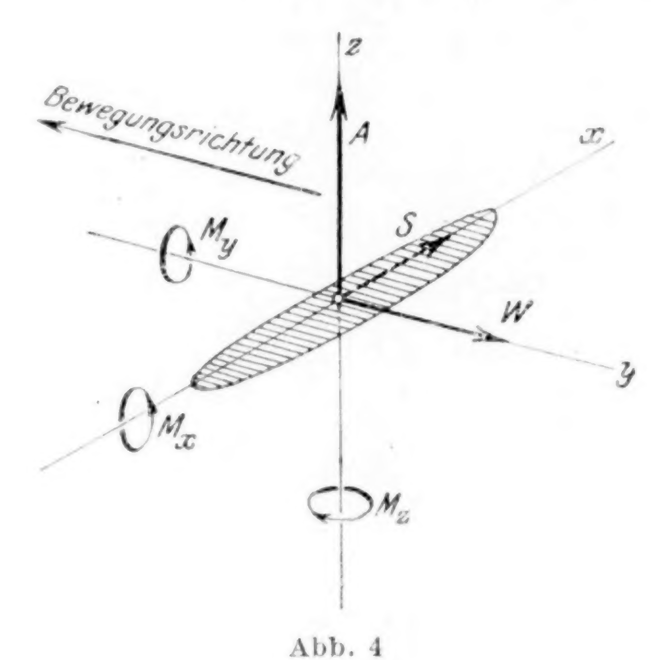


Abb. 4

Die Symmetrielinie des Flügels ist nach der Y-Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems orientiert; die Bewegung erfolge entgegen der Y-Richtung. Der Auftrieb A wirkt dann senkrecht zur Bewegung in der Z-Richtung, der Widerstand W der Bewegung entgegen in Richtung Y. Das Moment um die Y-Achse (Quermoment) und das Moment um die Z-Achse (Seitenmoment) bezeichnen wir mit M_y bezw. M_z. Die Seitenkraft S in Richtung X und das Moment M_x (Längsmoment) spielen bei unseren Betrachtungen keine Rolle.

a) Auftrieb und Widerstand. Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse wollen wir zunächst untersuchen, in welcher Weise sich Auftrieb und Widerstand bei kreisförmiger Bahn ausdrücken. Es ist:

$$d\,A = \varrho\, v\, \Gamma\, d\, x.$$

Setzt man für Γ den Ausdruck Gl. (4) ein und drückt man v durch die Geschwindigkeit v_0 in der Mitte des Flügels aus, so ergibt sich:

$$A = \varrho\, v_0\, \Gamma_0 \int_{-l}^{+l} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \left(1 + \frac{\beta\, x}{R}\right) \left(1 + \frac{x}{R}\right) d\, x$$

$$= \varrho\, v_0\, \Gamma_0 \left(\int_{-l}^{+l} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\, d\, x + \frac{\beta + 1}{R} \int_{-l}^{+l} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} + \frac{\beta}{R^2} \int_{-l}^{+l} x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\, d\, x \right).$$

Das 2. Integral in der Klammer mit dem Faktor $\frac{1}{R}$ ist Null. Berücksichtigen wir in diesem Falle, wo der Einfluß 1. Ordnung des Flugbahnradius verschwindet, die 2. Ordnung mit dem Faktor $\frac{1}{R^2}$, so erhält man für den Auftrieb

$$A = \varrho\, v_0\, \Gamma_0\, l \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\beta\, l^2}{4\, R^2}\right).$$

Der Faktor vor der Klammer stellt den Auftrieb bei geradliniger Bewegung dar; der Klammerausdruck gibt demnach die Aenderung gegenüber der geradlinigen Bewegung an. Er ist, wie man sieht, nur von geringem Einfluß auf die Größe des Auftriebes, falls der Bahnradius R gegenüber der Spannweite $2\, l$ groß ist. In erster Näherung bleibt daher der Auftrieb gegenüber dem geradlinigen Fluge ungeändert.

Zur Berechnung des induzierten Widerstandes dient der Ansatz:

$$d\,W = \frac{w}{v}\,d\,A = \varrho\,\Gamma\,w\,d\,x.$$

Setzen wir für Γ und w wieder die entsprechenden Ausdrücke Gl. (4) und Gl. (7) ein, so ergibt sich

$$W = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{4\,l}\int\limits_{-l}^{+l}\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta\,x}{R}\right)\left(1+\frac{x}{R}\,(2\,\beta+{}^1\!/\!_2)\right)d\,x.$$

Die Ausrechnung des Integrals (in ähnlicher Weise wie oben) liefert für den Widerstand

$$W = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2\,\pi}{8}\left(1+\frac{\left(2\,\beta^2+\frac{\beta}{2}\right)l^2}{4\,R^2}\right).$$

Beim geradlinigen Fluge ist

$$W = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2\,\pi}{8}\,.$$

Ist $\frac{l}{R}$ klein, so wird der Unterschied gegenüber der geradlinigen Bewegung unbedeutend.

b) Das Moment um die Y-Achse (Quermoment). Zur Bestimmung des Quermomentes M_y setzen wir an:

$$M_y = \int\limits_{-l}^{+l} x\,d\,A = \varrho\int\limits_{-l}^{+l} x\,\Gamma\,v\,d\,x.$$

Γ und v werden wieder, da sie längs der Spannweite veränderlich sind, durch die entsprechenden Ausdrücke ersetzt. Man erhält dadurch:

$$M_y = \varrho\,v_0\,\Gamma_0\int\limits_{-l}^{+l} x\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta\,x}{R}\right)\left(1+\frac{x}{R}\right)d\,x.$$

Die Integration dieses Ausdruckes liefert unter Vernachlässigung der 2. Ordnung für das Quermoment, wenn man $2\,l = b$ setzt,

$$M_y = \frac{A\,b^2\,(\beta+1)}{16\,R} \qquad \text{. . . . . (9).}$$

Es ist hier am Platze, darauf hinzuweisen, daß nach der elementaren Theorie, welche die Wirkung des Wirbelbandes unberücksichtigt läßt, der Wert von $\beta = 1$ ist. In diesem Falle würde das Quermoment M_y' sein:

$$M_y' = \frac{A\,b^2}{8\,R}\,.$$

Man sieht, daß, da stets β kleiner als 1 ist, das auf den Grundlagen der Tragflügeltheorie berechnete Moment kleiner ist als dasjenige, das sich aus der einfachen elementaren Auffassung ergibt. Die Krümmung des Wirbelbandes wirkt demnach im Sinne einer Abschwächung auf das Quermoment.

c) Das Moment um die Z-Achse (Seitenmoment). Die gleichen Ursachen, die für das Vorhandensein des Quermomentes maßgebend sind, bewirken auch das Auftreten eines Momentes um die Z-Achse. Die äußere Flügelhälfte erfährt wegen des größeren Auftriebes einen größeren induzierten Widerstand, dann aber auch als direkte Wirkung der größeren Geschwindigkeit einen größeren Profilwiderstand. Das Moment des induzierten Widerstandes bezeichnen wir mit M_{zi}, das des Profilwiderstandes mit M_{z0}.

Das Moment des induzierten Widerstandes ist:

$$M_{zi} = \int\limits_{-l}^{+l} x\,\frac{w}{v}\,d\,A = \frac{\varrho\,\Gamma_0^2}{4\,l}\int\limits_{-l}^{+l} x\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta\,x}{R}\right)\left(1+\frac{x}{R}\,(2\,\beta+{}^1\!/\!_2)\right)d\,x.$$

Die Durchrechnung ergibt unter Vernachlässigung der Glieder 2. Ordnung

$$M_{zi} = \frac{A^2\,(6\,\beta+1)}{32\,\pi\,q\,R} \qquad \text{. . . . . (10).}$$

Auffallend ist hier, daß dieses Moment von der Flügelspannweite unabhängig ist. Der Ausdruck hat aber, wie man sich leicht überzeugt, die Dimension eines Momentes. Zum Vergleich schreiben wir auch hier wieder das nach dem elementaren Ansatz errechnete Moment M_z' an, das wir aus dem vorstehenden Ausdruck erhalten, wenn $\beta = 1$ gesetzt wird. Es ist also

$$M_z' = \frac{7\,A^2}{32\,\pi\,q\,R}.$$

Dieses Moment ist ebenfalls wieder größer als das nach der Tragflügeltheorie gerechnete.

Wir wollen auch noch den Beitrag des Profilwiderstandes zum Seitenmoment ermitteln. Es ist:

$$M_{z\,o} = \int_{-l}^{+l} x\,c_{w\,o}\,\frac{\varrho\,v^2}{2}\,t\,d\,x.$$

Hierbei bedeutet $c_{w\,o}$ die Profilwiderstandszahl, von der wir annehmen, daß sie für alle Flügelelemente die gleiche ist. Drücken wir die veränderliche Geschwindigkeit v und die veränderliche Flügeltiefe t durch die Werte in der Flügelmitte aus, so ergibt sich:

$$M_{z\,o} = c_{w\,o}\,t_0\,\frac{\varrho\,v_0^2}{2}\int_{-l}^{+l} x\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{x}{R}\right)d\,x$$

und somit

$$M_{z\,o} = W_0\,\frac{b^2}{8\,R}$$

unter $W_0 = c_{w\,o}\,F\,q$ den Profilwiderstand der geradlinigen Bewegung verstanden. Nun ist das gesamte Seitenmoment

$$M_z = M_{z\,i} + M_{z\,o}$$

und wir erhalten daher:

$$M_z = \frac{1}{8\,R}\left(\frac{A^2\,(6\,\beta+1)}{4\,\pi\,q} + W_0\,b^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

5. Der linear verwundene Flügel als verwandtes Problem. Die analytische Behandlung des linear verwundenen Flügels mit elliptischem Umriß ist dem bisher behandelten Falle der Bewegung eines Flügels auf einer kreisförmigen Bahn ganz ähnlich. Es sollen daher die besonderen Verhältnisse hier kurz dargelegt werden. Die Analogie mit der vorstehend behandelten Aufgabe beschränkt sich jedoch nur auf eine derartige Verwindung, bei welcher sich der Anstellwinkel nach einem linearen Gesetz in stetiger Weise von der einen bis zur anderen Flügelspitze ändert. Bedeutet α_0 den Anstellwinkel in der Mitte des Flügels, so stellen wir die Verwindung durch folgende Beziehung dar:

$$\alpha\,(x) = \alpha_0\left(1+\frac{x}{\mu\,l}\right),$$

wobei die Stärke der Verwindung durch die dimensionslose Zahl μ ausgedrückt wird. Um die Auftriebsverteilung eines solchen Flügels zu bestimmen, setzen wir unter Annahme eines elliptischen Flügelumrisses die Zirkulation wieder in der Form an:

$$\Gamma = \Gamma_0\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}\left(1+\frac{\beta'\,x}{\mu\,l}\right).$$

Die dieser Auftriebsverteilung entsprechende Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich ganz analog wie beim Flügel auf der Kreisbahn zu:

$$w = \frac{\Gamma_0}{4\,l}\left(1+\frac{2\,\beta'\,x}{\mu\,l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Der Zahlenfaktor β' ist nun wieder so zu bestimmen, daß die angenommene Zirkulationsverteilung mit der geometrischen Form des Flügels verträglich ist. Man erhält hierfür:

$$\beta' = \frac{1+\frac{\pi}{2}\lambda}{1+\pi\,\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Für verschiedene Achsenverhältnisse λ des elliptischen Flügels erhält man die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Werte von β':

$\lambda =$	∞	10,0	5,0	2,0	1,0	0,9	0,8	0,7
$\beta' =$	0,500	0,515	0,529	0,572	0,620	0,632	0,645	0,657
$\lambda =$	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0
$\beta' =$	0,674	0,695	0,720	0,758	0,807	0,883	0,934	1,0.

Die Werte von β' sind, wie man sieht, größer als die Werte von β beim Kurvenflug, d. h. die Abweichung der wirklichen Auftriebsverteilung von der nach der elementaren Theorie berechneten, bei welcher der Auftrieb einfach proportional dem Anstellwinkel des betreffenden Flügelelementes gesetzt wird und die Rückwirkung des abgehenden Wirbelbandes auf den Flügel unberücksichtigt bleibt, ist hier nicht so groß wie in dem zuerst behandelten Falle der Bewegung auf einer gekrümmten Bahn.

Bei Vergleich des Auftriebes und Widerstandes mit den gleichen Größen des unverwundenen Flügels zeigt sich, daß der Auftrieb wegen der konstanten Geschwindigkeit längs der Spannweite genau derselbe ist wie beim unverwundenen Flügel. Dagegen ergibt die nähere Berechnung für den induzierten Widerstand:

$$W = \frac{\varrho \Gamma_0 \pi}{8}\left(1 + \frac{\beta'^2}{2\mu^2}\right).$$

Für die Momente M_y und M_z erhält man:

$$M_y = \frac{A b \beta'}{8\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (14) \qquad \text{und} \qquad M_z = \frac{3 A^2 \beta'}{8 \pi q b \mu} \quad . \quad . \quad (15).$$

6. Bestimmung der Einflußzahl β durch den Versuch. a) Versuchsanordnung und Methode. Zur Prüfung der im Vorstehenden entwickelten Theorie erschien es wünschenswert, die Einflußzahl β durch den Versuch festzustellen. Hierzu wurde der in Abb. 5 dargestellte Rundlauf verwendet. Die Achse desselben ist am Boden und an einem Unterzug der Decke in Kugeln gelagert. Der zu untersuchende Flügel wurde zwischen den beiden Armen des Rundlaufes, die aus Stahlrohr mit günstigem Luftwiderstandsquerschnitt bestanden, in noch näher zu beschreibender Weise befestigt und zwar so, daß er um die Symmetrieachse (y-Achse) schwingen konnte. Jede Messung wurde während einer einzigen Umdrehung des Rundlaufes ausgeführt, um zu vermeiden, daß der Flügel die durch einen vorhergehenden Umlauf gestörte Luftströmung noch einmal passierte. Die Einrichtung wurde zu diesem Zweck so getroffen, daß $^1/_4$-Umdrehung zur Beschleunigung, etwas mehr als $^1/_2$-Umdrehung zur Messung und eine weitere Umdrehung zur Bremsung benutzt wurde. Die eigentliche Messung fand daher in vollkommen ruhiger und ungestörter Luft statt. Der Antrieb erfolgte, wie aus Abb. 5 ersichtlich, durch Fallgewichte, die an beiden Seiten befestigt waren und an einer

Abb. 5

Riemenscheibe R angriffen. Um eine Durchbiegung der Achse durch einseitige Wirkung der Fallgewichte auszuschalten, wurde der Antrieb doppelt an zwei gegenüberliegenden Stellen der Riemenscheibe ausgeführt, so daß auf die Achse ein reines Moment wirkte. An jedem Seil hingen zwei Gewichte. Das größere von 20 kg diente zur Beschleunigung und setzte bereits nach $^1/_4$-Umdrehung auf eine Unterlage auf. Das zweite 5 kg schwere Gewicht diente zur Ueberwindung der Bewegungswiderstände während der Periode mit konstanter Geschwindigkeit. Meistens wurde die Beschleunigung durch Ziehen an dem Querbalken T von Hand noch etwas vergrößert. Nach etwa einer Umdrehung wickelten sich die an der Riemenscheibe angreifenden beiden Seile nach der entgegengesetzten Seite auf und bewirkten dadurch zunächst eine Bremsung der Bewegung und dann, nachdem der Ruhepunkt erreicht war, eine Beschleunigung in umgekehrter Richtung. Auf diese Weise wurde der Flügel wieder in die Ausgangsstellung zurückgeführt und stand für den nächsten Versuch bereit.

Den Messungen zur Bestimmung des Quermoments lag folgendes Prinzip zugrunde: Geht die Drehachse des Flügels durch dessen Schwerpunkt, so wird bei der Bewegung auf der Kreisbahn das auftretende Quermoment den Flügel zu kippen suchen. Angenommen der Mittelpunkt der Kreisbahn liegt rechts vom Flügel (Abb. 6), so wird, falls der Auftrieb nach unten gerichtet ist (wenn z. B. der Flügel umgekehrt, d. h. mit der Druckseite nach oben aufgehängt ist), das auftretende Moment um D entgegen dem Uhrzeigersinn wirken, da der resultierende Auftrieb an einem Hebelarm e angreift. Um nun dem Moment der Luftkraft Gleichgewicht zu halten, wird unter dem Drehpunkt D ein Gewicht G angebracht, das mit dem Flügel fest verbunden ist und in vertikaler Richtung verschoben werden kann. Auf dieses Gewicht wirkt beim Umlauf des Flügels die Zentrifugalkraft C horizontal nach außen an dem Hebelarm l_1. Der Drehsinn dieses Zentrifugalkraftmomentes ist der umgekehrte wie derjenige des Quermomentes. Bei geeigneter Entfernung des Gewichtes G vom Drehpunkt wird daher zwischem dem Zentrifugalkraftmoment und dem Quermoment der Luftkraft Gleichgewicht bestehen. Dieses Gleichgewicht ist unabhängig von der Umlaufgeschwindigkeit, da sowohl der Auftrieb als auch die Zentrifugalkraft proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachsen. Es war daher nicht erforderlich, bei jedem Umlauf die genaue Geschwindigkeit zu ermitteln; vielmehr genügte es, diese einmalig annähernd festzustellen. Quantitativ liegen die Verhältnisse folgendermaßen:

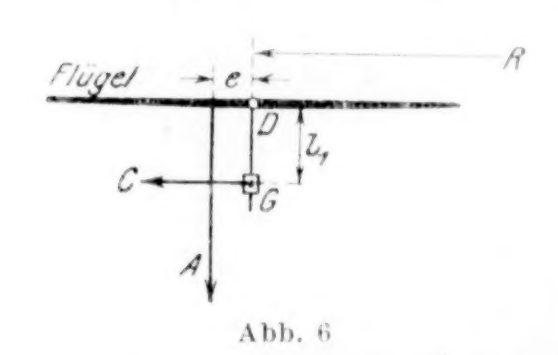


Abb. 6

Das Moment M_y der Luftkraft hat nach Gl. (9) S. 333 den Wert

$$M_y = \frac{N b^2 (\beta + 1)}{16 R}.$$

Hierbei ist der Auftrieb A durch die Normalkraft N, d. i. die auf der Flügelsehne senkrechte Komponente der Luftkraft, ersetzt. Dies war erforderlich, weil die Drehachse des Flügels nicht immer horizontal liegt, sondern je nach dem Anstellwinkel des Flügels mehr oder weniger geneigt ist. Bei einer Neigung der Drehachse ist aber nicht mehr der Auftrieb, sondern die Normalkraft für das Moment maßgebend. Das Moment M_c der Zentrifugalkraft ist

$$M_c = \frac{G v^2 l_1}{g R} \quad (g = \text{Erdbeschleunigung}).$$

Für den Gleichgewichtszustand muß $M_c = M_y$ sein, also

$$\frac{G v^2 l_1}{g R} = \frac{N b^2 (\beta + 1)}{16 R}.$$

Daraus ergibt sich

$$\beta + 1 = \frac{32 G l_1}{c_n F \gamma b^2} \quad \ldots \quad (16)$$

unter $c_n = \frac{N}{F q}$ die Normalkraftszahl und unter γ das spez. Gewicht der Luft verstanden. Von den Größen auf der rechten Seite sind F, γ und b ohne weiteres bekannt. Das Produkt $G l_1$ bestimmt man am genauesten durch Feststellung des Winkelausschlages δ, den der Flügel beim Auflegen eines bekannten Gewichtes macht. Wird auf den horizontal

liegenden Flügel im Abstande d vom Drehpunkt ein Gewicht P aufgelegt, so tritt ein gewisser Ausschlag δ ein. Durch einfache Rechnung ergibt sich dann:

$$G l_1 = \frac{P d}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Der Auftrieb (bezw. die Normalkraft) ist, wie bereits gezeigt, in erster Näherung der gleiche wie bei der geradlinigen Bewegung. Wir können für ihn daher den Wert nehmen, der sich aus der Messung des Flügels im künstlichen Luftstrom für den betreffenden Anstellwinkel ergibt.

Bei den Versuchen kam es nun darauf an, das verschiebbare Gewicht G so einzustellen, daß der Flügel beim Umlauf keinen Ausschlag macht, denn dann sind Quermoment und Zentrifugalkraftmoment einander gleich. Es war zu erwarten, daß der Flügel während der Bewegung Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt. Um während der Meßperiode mehrere volle Schwingungen beobachten zu können, war es erforderlich, die Schwingungsdauer des Systems zu verkleinern. Zu diesem Zwecke wurde die innere Flügelspitze durch dünne Fäden mit zwei Blattfedern verbunden, die an den beiden Armen des Rundlaufes befestigt waren (vergl. Abb. 5 und 8). Die Federn waren so bemessen, daß die Schwingungsdauer des Flügels 0,2 bis 0,3 s betrug. Die Bewegung der Flügelspitze während einer Umdrehung wurde auf eine 68 × 18 mm große Schreibtafel, aus einer berußten Glasplatte bestehend, aufgezeichnet. Der Schreibstift war an der unteren Blattfeder angebracht. Während eines Umlaufes wurde die Schreibtafel durch eine besondere Vorrichtung in radialer Richtung verschoben und dadurch die Bewegung der Flügelspitze als Funktion des zurückgelegten Weges aufgezeichnet (vergl. Abb. 10). Die Vorrichtung zur Verschiebung der Schreibtafel bestand aus einem Hebel H, der an der Rundlaufachse in einer vertikalen Ebene drehbar befestigt war. Der Arm dieses Hebels lag auf dem feststehenden Blechzylinder C auf, dessen oberer Rand nach einer Schraubenlinie abgeschnitten war. Der Hebel gleitet während des Umlaufes an der Schraubenlinie entlang. Die vertikale Bewegung, die er dadurch macht, da er infolge seines Gewichtes immer nach unten drückt, wird mit Hilfe eines Fadens, der an dem unteren Rundlaufarm um eine Rolle U gelegt ist, auf die Schreibtafel übertragen, die längs einer Schlittenführung horizontal beweglich ist. Radial nach außen wird von einer Spiralfeder ein dauernder Zug auf den Schlitten ausgeübt, so daß der Faden stets gespannt bleibt. Am Ende der Meßstrecke, also nach etwas mehr als $^3/_4$-Umdrehung wird der Schlitten mit der Schreibtafel durch eine Schnappeinrichtung festgehalten und damit das weitere Schicksal des Flügels nicht mehr berücksichtigt.

Der untersuchte Flügel besaß eine Spannweite von 100 cm und eine größte Tiefe von 20 cm. Um elliptische Verteilung des Auftriebes zu erhalten, nahm die Flügeltiefe einer Ellipse entsprechend nach außen ab. Die Druckmittelpunkte der einzelnen Querschnitte, die in $^1/_3$ der Tiefe angenommen wurden, lagen auf einer geraden Linie. Dadurch kam ein Umriß von der in Abb. 7 dargestellten Form zustande. Um dem Flügel größere Festigkeit zu geben, und die Neigung zum Verziehen möglichst zu vermindern, wurde ein ziemlich dickes Profil gewählt. Die größte Flügeldicke betrug 3 cm; das Verhältnis der größten Dicke zur Flügeltiefe war demnach 0,15. Als Material wurde Holz verwendet, das aus mehreren Schichten verleimt war. Nach den ersten Versuchen zeigte sich, daß das Gewicht des Flügels, das rd. 1,6 kg betrug, zu groß war, indem die Lagerreibung die Meßgenauigkeit ungünstig beeinträchtigte. Der Flügel wurde daraufhin von der Druckseite her ausgehöhlt, wobei nur einzelne Rippen zur Versteifung stehen blieben. Die ebene Druckseite wurde dann mit Pausleinwand überzogen. Nach dem Aus-

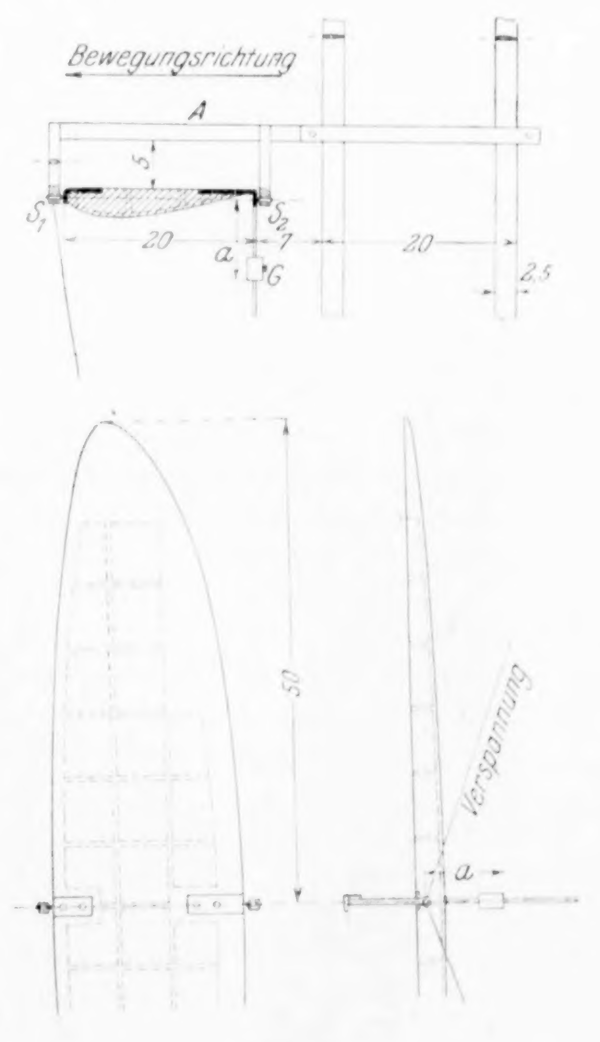


Abb. 7

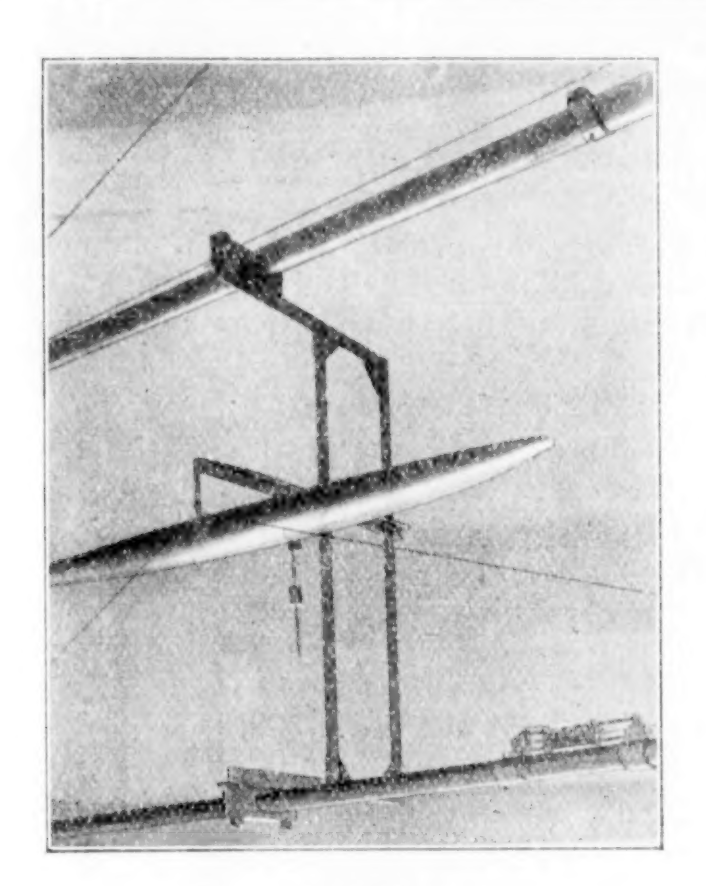


Abb. 8

höhlen betrug das Flügelgewicht nur mehr 0,72 kg Bei Herstellung der Flügelform wurde auf möglichste Symmetrie der beiden Hälften geachtet. In der Mitte des Flügels waren an der Vorder- und Hinterkante Stahlstücke eingelassen und mit konischen Bohrungen versehen. In diese Bohrungen faßten die gehärteten Spitzen von zwei Stahlschrauben S_1 und S_2, so daß nun der Flügel um die durch die Spitzen hindurchgehende Achse drehbar war. Die Lager der beiden Stahlspitzen waren an einem darüber liegenden Querarm A befestigt; dieser konnte in beliebiger Lage (zur Einstellung verschiedener Anstellwinkel) an zwei vertikalen schnittigen Streben festgeklemmt werden. Der vordere Lagerpunkt S_1 war außerdem, um eine Ausbiegung durch die Zentrifugalkraft zu vermeiden, mit dünnen Stahldrähten an den beiden Armen des Rundlaufes verankert. Alle Halteteile des Flügels waren mit Rücksicht auf möglichst geringe Störung der Strömung mit günstigem Luftwiderstandsquerschnitt ausgeführt. Das verschiebbare Gewicht G zur Erzeugung eines Zentrifugalkraftmomentes war, wie ersichtlich, an dem hinteren Lager des Flügels befestigt. Die Befestigung an den beiden Armen sowie die Schreibeinrichtung ist auf dem Lichtbild Abb. 8 zu erkennen. Die Entfernung der Flügelmitte von der Rundlaufachse betrug bei den folgenden Versuchen 300 cm.

b) Versuche und Ergebnisse. Es war zunächst erforderlich, den Verlauf der Geschwindigkeit während der Meßperiode zu untersuchen. Dazu wurde ein kleines Pendel verwendet, das in radialer Richtung schwingen konnte. Die Ausschläge des Pendels während des Umlaufes, hervorgerufen durch die Zentrifugalkraft, wurden auf der Schreibtafel aufgezeichnet. Da nur eine geringe Dämpfung des Pendels durch Schreibstiftreibung vorhanden war, so führte es Schwingungen um die jeweilige Gleichgewichtslage aus. Aus der Anzahl Schwingungen während eines bestimmten Weges konnte, da die Schwingungsdauer bekannt war (rd. $^1/_4$ s), die Geschwindigkeit des Flügels bestimmt werden; sie betrug bei den folgenden Versuchen rd. 8 m/s. In Abb. 9 ist eine Pause eines solchen Geschwindigkeitsdiagrammes wiedergegeben. Die ganze Diagrammlänge entspricht etwas weniger als einer vollen Umdrehung des Rundlaufes. Man sieht, daß die Beschleunigungsperiode etwa $^1/_4$ des aufgezeichneten Weges beansprucht, der übrige ist zur Messung verfügbar. Die Unregelmäßigkeiten der Schwingungen, die sich auch bei den eigentlichen Messungen mehr oder weniger zeigten, sind durch elastische Schwingungen und Erzitterungen der beiden Rundlaufarme hervorgerufen, die sich den aufzuzeichnenden Schwingungen überlagern.

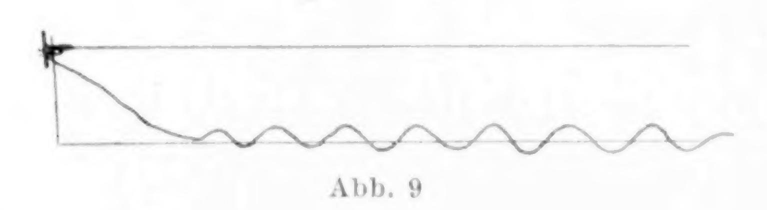


Abb. 9

Es konnte von vornherein nicht angenommen werden, daß der Flügel vollkommen symmetrisch, insbesondere ohne jede Verwindung ausgeführt ist. Eine vorhandene Verwindung aber gibt ebenfalls ein Moment um die Drehachse, das additiv zu dem von der Kreisbahn herrührenden Moment hinzutritt. Ein etwaiges Moment dieser Art läßt sich dadurch feststellen und eliminieren, daß der Flügel um 180° um die Achse gedreht wird, so daß z. B. die Druckseite, die beim ersten Versuch nach oben war, jetzt nach unten zu liegen kommt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß das Verwindungsmoment sich in einem Falle zum Kurvenmoment addiert, im anderen dagegen subtrahiert, so daß durch das arithmetische Mittel der richtige Wert angegeben wird.

Weiterhin wurde untersucht, ob bei der Bewegung des Flügels nicht etwa unvorhergesehene Massenwirkungen auftreten, die die Ergebnisse fehlerhaft beeinflussen. Zu diesem Zwecke wurde der Flügel auf Auftrieb Null ($\alpha = -6^1/_4{}^0$) eingestellt. Es ist dann — von einem etwaigen Verwindungsmoment abgesehen — das zu messende Quer-

moment = 0. Wenn wir nun auch das Zentrifugalkraftmoment zu Null machen, indem wir das Gewicht G samt Stiel vom Flügel entfernen, so muß Gleichgewicht vorhanden sein, denn durch die Wahl der Drehachse ist der Flügel für sich in das indifferente Gleichgewicht gebracht. Die Ausschläge der Flügelspitze müssen daher symmetrisch zur Nullinie liegen. Dies war in der Tat der Fall und es zeigte sich bereits hier durch Ausführung desselben Versuches in der um 180° gedrehten Lage, daß eine merkliche Verwindung des Flügels nicht vorhanden war.

Da nach Gl. (16) zur Bestimmung von β die Kenntnis von c_n bei verschiedenen Anstellwinkeln nötig ist, so wurde im parallelen Luftstrom eine Messung zur Bestimmung von Auftrieb und Widerstand ausgeführt. Der Wert c_n, der sich von c_a bei kleinen Anstellwinkeln kaum unterscheidet, läßt sich daraus berechnen. Hierzu ist zu bemerken, daß im Luftstrom die gesamte Haltevorrichtung des Flügels einschließlich der beiden Rundlaufarme mit aufgebaut war (jedoch nicht in fester Verbindung mit dem an dem Wagen aufgehängten Flügel), damit etwaige von diesen Teilen herrührende Störungen der Luftkräfte des Flügels im parallelen Luftstrom in gleicher Weise vorhanden sind wie bei der Bewegung am Rundlauf. Die Luftgeschwindigkeit bei dieser Messung war die gleiche wie am Rundlauf, nämlich rd. 8 m/s. Die Ergebnisse sind aus der folgenden Zahlentafel ersichtlich:

α	c_a	c_w	c_n
−5,8	0,044	0,04	0,044
−2,9	0,25	0,024	0,25
0,1	0,48	0,027	0,48
3,0	0,67	0,042	0,67
6,0	0,81	0,062	0,81
8,9	0,80	0,098	0,81

Die Bestimmung des Wertes Gl_1 bei verschiedenen Stellungen des Gewichtes G in der bereits S. 337 angedeuteten Weise ergab das nachstehende Resultat. Dabei bedeutet a den Abstand der unteren Begrenzungsfläche des Gewichtes G von der Drehachse des Flügels (vergl. Abb. 7).

a (cm)	6,8	8,8	10,8	12,8	14,8	16,8
Gl_1 (cm gr) . .	438	561	664	768	875	985

Nach diesen Vorarbeiten wurden die eigentlichen Versuche ausgeführt. Eine größere Anzahl von Meßpunkten war mit Rücksicht auf eine sichere Feststellung des Wertes von β erwünscht. Die Versuche fanden daher bei 5 verschiedenen Anstellwinkeln (von 0° bis 4°) und in je zwei Lagen statt. Da nach dem Ergebnis im parallelen Luftstrom die Strömung bei Anstellwinkeln über 4° abzureißen beginnt, so wurden diese höheren Winkel nicht mehr in den Bereich der Messungen gezogen. Die Abb. 10 gibt die Aufzeichnung von zwei Versuchen wieder. Beim oberen Bild besteht zwischen den beiden Momenten kein Gleichgewicht, da noch ein merklicher Ausschlag zu erkennen ist. Beim unteren Bild hingegen liegen die Ausschläge ziemlich genau symmetrisch zur Nullinie, hier ist also Gleichgewicht vorhanden. Im Durchschnitt waren etwa 4 Umläufe nötig, bis diejenige Stellung des Gewichtes G ermittelt war, bei welcher Gleichgewicht besteht.

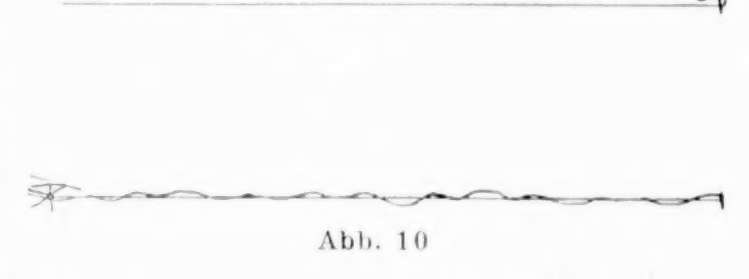


Abb. 10

Die Ergebnisse der Hauptversuche mit dem daraus nach Gl. (16) bestimmten Wert von $\beta + 1$ sind in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt. Den Wert von $\beta + 1$ haben wir angegeben, weil diese Kombination in der Formel Gl. (9) für das Quermoment vorkommt.

	Druckseite unten				Druckseite oben			
α	a	Gl_1	c_n	$\beta + 1$	a	Gl_1	c_n	$\beta + 1$
0°	98	460	0,46	1,66	100	450	0,46	1,62
1°	88	510	0,54	1,58	84	535	0,54	1,66
2°	74	590	0,60	1,62	74	590	0,60	1,62
3°	65	635	0,67	1,57	67	625	0,67	1,55
4°	48	725	0,74	1,63	45	740	0,74	1,66

Als Mittel aus diesen 10 Messungen ergibt sich für $\beta + 1$ der Wert 1,62. Die größte gemessene Abweichung von diesem Mittelwert beträgt rd. $4^1/_2$ vH. Die Genauigkeit einer Einzelmessung dürfte schätzungsweise etwa $\pm$ 3 bis 4 vH betragen. Der theoretische Wert von $\beta + 1$ für einen Flügel von dem vorliegenden Achsenverhältnis beträgt 1,71 (vergl. die Zahlentafel auf S. 332). Nach der elementaren Theorie ist, wie wir wissen, $\beta + 1 = 2$. Der experimentelle Wert von $\beta + 1$ ist, wie man sieht, um rd. 5,5 vH niedriger als der unter Zugrundelegung der Tragflügeltheorie erhaltene Wert. Die Ursachen für den geringeren experimentellen Wert können folgende sein:

1. Den theoretischen Entwicklungen liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Spannweite des Flügels klein ist gegenüber dem Radius der Flugbahn. Dies war bei den beschriebenen Versuchen nicht in hinreichendem Maße der Fall und es ist vielleicht möglich, daß aus diesem Grunde Abweichungen der beobachteten Art auftreten.

2. Bei dem dicken Flügel und der verhältnismäßig geringen Geschwindigkeit tritt vermutlich auf der Saugseite Ablösung der Strömung und Totwasserbildung ein. Dieses Totwasser wird durch die Zentrifugalkraft radial nach außen geschleudert und dadurch auf der Außenhälfte des Flügels die Ablösung begünstigt. Verstärkung der Ablösung bedingt Verkleinerung des Auftriebes der äußeren Flügelhälfte und somit kleineres Quermoment. Bei großen Geschwindigkeiten und großen Flügeltiefen (große Reynoldssche Zahlen) tritt erfahrungsgemäß die Totwasserbildung immer mehr in den Hintergrund, so daß dann $\beta + 1$ möglicherweise dem theoretischen Wert zustreben wird.

Die Versuche bestätigen mit ausreichender Sicherheit das theoretische Resultat, daß nämlich das wirkliche Quermoment kleiner ist als dasjenige, das auf Grund der einfachen geometrischen Vorstellung berechnet wird, bei der der Einfluß des ringförmigen Wirbelbandes auf dem Flügel außer acht gelassen wird. 170

Über die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren.

Von **E. SCHWERIN** in Charlottenburg.

In einer 1920 veröffentlichten Arbeit hat Thoma[1]) die Spannungen berechnet, die in einem freitragenden, gefüllten Rohr infolge des Gewichts der Flüssigkeit auftreten, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Biegungsfestigkeit der Wandung selbst vernachlässigt werden kann. Hierbei ergab sich, daß die dann allein auftretenden Normal- und Schubspannungen aus den Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden können und sich in geschlossener Form angeben lassen.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der Einfluß der Biegungs- und Torsionsfestigkeit der Wandung eingehend verfolgt werden, und zwar nicht nur bei Belastung durch das Flüssigkeits-, sondern auch durch das Eigengewicht des Rohres selbst; ferner wird nicht nur das wagerecht liegende, sondern auch das geneigte Rohr in den Kreis der Betrachtung gezogen werden.

I. Spannungen infolge des Flüssigkeitsgewichts im wagerecht liegenden Rohr.

1. Aufstellung der Gleichungen. Das wagerecht gelagerte Rohr, mit Flüssigkeit vom spez. Gew. γ gefüllt, habe die Wandstärke δ, den Radius der Mittelfläche a und die Länge l; das Material besitze das spez. Gew. γ_E und die Elastizitätszahl E. In der Zylinderachse sei eine Druckhöhe h vorhanden, so daß nach Abb. 1 der in Richtung des Radius wirkende Flüssigkeitsdruck p in einem Punkt P, durch den Zentriwinkel φ charakterisiert, beträgt:

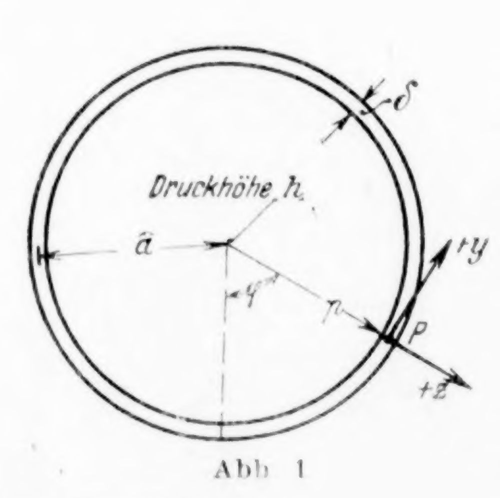


Abb. 1

$$p = \gamma (h + a \cos \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der Punkt P sei zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems gewählt, dessen x-Achse in Richtung der Rohrachse nach links weist und dessen y- und z-Achse wie oben

[1]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1920.

angegeben gerichtet sind. Auf die nach wachsendem x und y hin gelegenen Seitenflächen des Zylinderelements wirken dann folgende, auf die ganze Wandstärke δ und die Längeneinheit bezogenen Resultanten von Kräften und Momenten:

längs des Querschnitts des Rohres:

gleichmäßig über die Wandstärke verteilte Normalspannungen als Zugspannungen positiv, mit der Resultierenden T_1; linear mit dem Abstand von der Mittelfläche wachsende Biegungsspannungen, statisch gleichwertig einem Kräftepaar vom Moment G_1, positiv, wenn auf Zubiegung der Schale hinwirkend;

Schubspannungen in Richtung der z-Achse mit der Resultierenden N_1;

Torsionsspannungen statisch gleichwertig einem Torsionsmoment H_1, positiv, wenn entgegengesetzt dem Uhrzeiger drehend;

Schubspannungen in Richtung der y-Achse mit der Resultierenden S_1;

längs der Zylindererzeugenden:

analoge Spannungsresultanten T_2, N_2 und Spannungsmomente G_2, gleichfalls als zubiegende Momente positiv;

Schubspannungen in Richtung der negativen x-Achse mit der Resultierenden S_2;

Torsionsspannungen, gleichwertig einem Torsionsmoment H_2, positiv im Sinne des Uhrzeigers.

Die Formänderung der Schale sei in folgender Weise gekennzeichnet:

u, v, w die in die Richtungen der bezw. x, y, z-Achsen fallenden Verschiebungskomponenten von P.

ε_1 ε_2 in der Mittelfläche gemessene Dehnungen in Richtung der Erzeugenden bezw. senkrecht dazu.

ω Winkelverkleinerung des ursprünglich rechten, von den positiven x- und y-Richtungen eingeschlossenen Winkels.

$\varkappa_1$ $\varkappa_2$ Krümmungsänderungen in Richtung der Erzeugenden bezw. senkrecht dazu, als Aufbiegungen positiv.

τ der gegenseitige Verdrehungswinkel zweier auf derselben Erzeugenden im Abstand der Längeneinheit liegender Querschnittselemente, positiv im Sinne von H_1.

Bezeichnet σ den Querkontraktionskoeffizienten und wird zur Abkürzung:

$$D = \frac{E\,\delta^3}{12\,(1-\sigma^2)}$$

gesetzt, so sind nach Love[1]) die Spannungsresultanten bezw. Spannungsmomente mit den Formänderungen in folgender Weise verbunden:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) & G_1 &= -D\,(\varkappa_1 + \sigma\,\varkappa_2) + T_1\,\frac{\delta^2}{12\,a} \\ T_2 &= \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) & G_2 &= -D\,(\varkappa_2 + \sigma\,\varkappa_1) \\ S_1 &= \frac{12\,D}{\delta^2}\,\frac{1-\sigma}{2}\,\omega & H_1 &= D\,(1-\sigma)\,\tau - S_1\,\frac{\delta^2}{12\,a} \\ & & H_2 &= -D\,(1-\sigma)\,\tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (\mathrm{I}).$$

Die Hinzufügung der T_1 und S_1 enthaltenden Korrektionsglieder in den Formeln für G_1 und H_1 ist deshalb notwendig, weil die Biegungsverzerrungen $\delta\varkappa$, $\delta\tau$ klein gegen die Reckungen ε, ω sind.

Ferner ergeben sich aus den von Love angegebenen allgemeinen Beziehungen, wenn zur Abkürzung:

$$\xi = \frac{x}{a} \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi} = U' \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = U^{\cdot}$$

geschrieben wird, folgende Formänderungs-Verschiebungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a\,\varepsilon_1 &= u' & a^2\,\varkappa_1 &= w'' \\ a\,\varepsilon_2 &= v^{\cdot} + w & a^2\,\varkappa_2 &= w^{\cdot\cdot} - v^{\cdot} \\ a\,\omega &= v' + u^{\cdot} & a^2\,\tau &= w^{\cdot\prime} - v' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{II}),$$

[1]) A. E. H. Love, Lehrb. d. Elastizität, deutsch von A. Timpe, Teubner 1907, S. 604, 605, (36) u. (39).

während die Gleichgewichtsbedingungen am Zylinderelement lauten:

$$T_1' - S_2^{\cdot} = 0 \qquad H_1' - G_2^{\cdot} + N_2\, a = 0$$
$$S_1' + T_2^{\cdot} + N_2 = 0 \qquad G_1' + H_2^{\cdot} - N_1\, a = 0$$
$$N_1' + N_2^{\cdot} - T_2 + a\gamma\,(h + a\cos\varphi) = 0 \qquad -H_2 + (S_1 + S_2)\, a = 0$$

oder auch, wenn S_2 mit Hilfe der letzten Gleichung und H_2 mittels (I.) eliminiert wird:

$$\left.\begin{array}{ll} T_1' + S_1^{\cdot}\left(1 + \dfrac{\delta^2}{12\,a^2}\right) + \dfrac{H_1^{\cdot}}{a} = 0 & H_1' - G_2^{\cdot} + N_2\, a = 0 \\ S_1' + T_2^{\cdot} + N_2 = 0 & G_1' - H_1^{\cdot} - S_1^{\cdot}\, a\, \dfrac{\delta^2}{12\,a^2} - N_1\, a = 0 \\ N_1' + N_2^{\cdot} - T_2 + a\gamma\,(h + a\cos\varphi) = 0 & \end{array}\right\} \quad \text{(III)}.$$

Nun besteht die in diesen Gleichungen auftretende, von den äußeren Kräften abhängige »Störungsfunktion« $a\gamma\,(h + a\cos\varphi)$ aus den beiden Gliedern $a\gamma h$ und $a^2\gamma\cos\varphi$ und es wird daher der schließlich resultierende Gesamtspannungszustand, da für das hier vorliegende lineare Gleichungssystem das Superpositionsgesetz gilt, als Ueberlagerung der den beiden Einflüssen $a\gamma h$ und $a^2\gamma\cos\varphi$ entsprechenden Spannungszustände erhalten werden können. Man erkennt, daß das konstante Störungsglied $a\gamma h$ einen rotationssymmetrischen, das Glied $a^2\gamma\cos\varphi$ hingegen einen in bezug auf φ sinus- bezw. cosinusförmig verlaufenden Spannungszustand hervorrufen wird, von denen der letztere, also der Fall $h = 0$, zunächst betrachtet werde.

2. Der sinusförmige Spannungszustand infolge von $a^2\gamma\cos\varphi$. Mit $h = 0$ kann wenn zur Abkürzung

$$\frac{\delta^2}{12\,a^2} = \varepsilon \qquad S_1 = S \qquad H_1 = H$$

gesetzt wird, den Gleichungen (I), (II), (III) durch folgenden Ansatz genügt werden:

$$\begin{array}{lll} T_1 = \overline{T}_1 \cos\varphi & G_1 = \overline{G}_1 \cos\varphi & N_1 = \overline{N}_1 \cos\varphi \\ T_2 = \overline{T}_2 \cos\varphi & G_2 = \overline{G}_2 \cos\varphi & N_2 = \overline{N}_2 \sin\varphi \\ S = \overline{S} \sin\varphi & H = \overline{H} \sin\varphi & \\ \varepsilon_1 = \overline{\varepsilon}_1 \cos\varphi & \varkappa_1 = \overline{\varkappa}_1 \cos\varphi & u = \overline{u} \cos\varphi \\ \varepsilon_2 = \overline{\varepsilon}_2 \cos\varphi & \varkappa_2 = \overline{\varkappa}_2 \cos\varphi & v = \overline{v} \sin\varphi \\ \omega = \overline{\omega} \sin\varphi & \tau = \overline{\tau} \sin\varphi & w = \overline{w} \cos\varphi \end{array}$$

wo die überstrichenen Größen nur noch Funktionen von x darstellen. Hiermit gehen die Gleichgewichtsbedingungen (III), wenn wir die Querstriche nachträglich fortlassen, über in

$$\left.\begin{array}{ll} T_1' + S\,(1 + \varepsilon) + \dfrac{H}{a} = 0 & H' + G_2 + N_2\, a = 0 \\ S' - T_2 + N_2 = 0 & G_1' - H - S\, a\, \varepsilon - N_1\, a = 0 \\ N_1' + N_2 - T_2 + a^2\gamma = 0 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(III a)},$$

während die Formänderungsbedingungen lauten:

$$a\,\varepsilon_1 = u', \quad a\,\varepsilon_2 = v + w, \quad a\,\omega = v' - u, \quad a^2\varkappa_1 = w'', \quad a^2\varkappa_2 = -w - v, \quad a^2\tau = -w' - v'$$

$$T_1 = \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2), \qquad T_2 = \frac{12\,D}{\delta^2}\,(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1), \qquad S = \frac{12\,D}{\delta^2}\,\frac{1-\sigma}{2}\,\omega$$

$$G_1 = -D\,(\varkappa_1 + \sigma\,\varkappa_2) + T_1\, a\,\varepsilon, \quad G_2 = -D\,(\varkappa_2 + \sigma\,\varkappa_1), \quad H = +D\,(1-\sigma)\,\tau - S\, a\,\varepsilon.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun in folgender Weise zu einer einzigen Gleichung zusammenziehen. Die Addition der mit a multiplizierten ersten Gleichgewichtsbedingung zur letzten ergibt:

$$a\,T_1' + G_1' + a\,(S - N_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(3 a)},$$

ferner folgt aus der Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichgewichtsbedingung:

$$N_1' - S' + a^2\gamma = 0, \text{ somit } N_1 = S - a^2\gamma\,\xi - c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und zufolge (3 a)

$$a\,T_1 + G_1 + a\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Elimiminiert man aus den Gl. (III a) zunächst N_1 und N_2 und zwar mittelst der Beziehungen:

$$N_1 = S - a^2\gamma\,\xi - c_1, \quad N_2 = -\frac{1}{a}\,(H' + G_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

so erhält man folgende drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{c} T_1' + S\,(1+\varepsilon) + \frac{H}{a} = 0, \qquad S' - T_2 - \frac{H' + G_2}{a} = 0, \\ a\,T_1 + G_1 + a\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{(III b)}.$$

Aus diesen folgt:

$$\left.\begin{array}{c} G_1 = -\,a\,T_1 - a\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) \\ G_2 = a\,[(2+\varepsilon)\,S' - T_2 + T_1''], \qquad H = -\,a\,T_1' - a\,S\,(1+\varepsilon) \end{array}\right\} \quad . \quad \text{(III c)}.$$

Andererseits liefern die Formänderungsbedingungen (IIa) die Beziehungen:

$$\omega' + \varepsilon_1 = -\,a\,(\varkappa_2'' + \varkappa_1), \quad \varepsilon_2 = -\,a\,\varkappa_2, \quad \tau = a\,\varkappa_2' \quad . \; . \quad \text{(II b)}.$$

Ersetzt man hierin mit Hilfe der Gl. (Ia) die Formänderungen durch die Spannungsresultanten, so erhält man folgende weiteren Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} -\,G_1 + a\,\varepsilon\,T_1 + \sigma\,G_2 + (1+\sigma)\,(H' + a\,S'\,\varepsilon) = -\,a\,\varepsilon\,[2\,S'\,(1+\sigma) + T_1 - T_2\,\sigma] \\ a\,\varepsilon\,(T_2 - T_1\,\sigma) = G_2 - G_1\,\sigma + \sigma\,T_1\,a\,\varepsilon \\ H + a\,\varepsilon\,S + \frac{a\,\varepsilon}{1+\sigma}\,(T_2' - T_1'\,\sigma) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(II c)}$$

und schließlich durch Einführung von (IIIc) in (IIc) drei Gleichungen für T_1 T_2 S:

$$-\,(1+\sigma)\,(T_1'' + S') + T_1\,(1+\varepsilon) + \sigma\,S'\,(2+\varepsilon) - \sigma\,T_2 + \sigma\,T_1''$$
$$+\,\varepsilon\,[2\,S'\,(1+\sigma) + T_1 - T_2\,\sigma] + a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2 = 0 \quad . \; . \; . \quad (5),$$

$$\varepsilon\,(T_2 - T_1\,\sigma) - S'\,(2+\varepsilon) + T_2 - T_1'' - \sigma\,T_1 - \sigma\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right) = 0 \quad . \; . \quad (6),$$

$$-\,T_1' - S + \frac{\varepsilon}{1+\sigma}\,(T_2' - T_1'\,\sigma) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Aus der zweiten derselben folgt:

$$T_2 = \sigma\,T_1 + \frac{1}{1+\varepsilon}\left[S'\,(2+\varepsilon) + T_1'' + \sigma\left(a^2\gamma\,\frac{\xi^2}{2} + c_1\,\xi + c_2\right)\right] \quad (8).$$

Setzt man dies in (5) und (7) ein und eliminiert schließlich noch S, so erhält man für die Längsspannungsresultante T_1, wenn nur die erste Potenz der sehr kleinen Größe $\varepsilon = \frac{\delta^2}{12\,a^2}$ beibehalten und:

$$\frac{1-\sigma^2}{\varepsilon} = \frac{12\,a^2}{\delta^2}\,(1-\sigma^2) = \nu^4$$

gesetzt wird:

$$T_1^{(IV)} + \alpha_1\,T_1'' + \alpha_2\,T_1 + \beta_1\,\xi^2 + \beta_2\,\xi + \beta_3 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(IV)},$$

wo:

$$\alpha_1 = -\,4 - 2\,\varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{1+\sigma}, \quad \alpha_2 = \nu^4\left(1 + \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right),$$

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{2}\,a^2\,\nu^4\,\frac{1+\varepsilon}{1+3\,\varepsilon} = \sim \frac{\gamma}{2}\,a^2\,\nu^4\,(1 - 2\,\varepsilon), \quad \beta_2 = c_1\,\nu^4\,\frac{1+\varepsilon}{1+3\,\varepsilon} = \sim c_1\,\nu^4\,(1 - 2\,\varepsilon),$$

$$\beta_3 = c_2\,\nu^4\,\frac{1+\varepsilon}{1+3\,\varepsilon} = \sim c_2\,\nu^4\,(1 - 2\,\varepsilon).$$

Das Problem ist somit auf die Integration der Gl. (IV) zurückgeführt.

3. Integration. Das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung (IV) mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$T_1 = \begin{array}{l} C_1 \sin(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\,\xi) + C_2 \sin(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1\,\xi) \\ +\,C_3 \cos(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\,\xi) + C_4 \cos(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1\,\xi) \end{array} + \mathfrak{T}_{1_2}\,\xi^2 + \mathfrak{T}_{1_1}\,\xi + \mathfrak{T}_{1_0}$$

wo:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\nu^2}{2}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right) + 1 + \varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{2\,(1+\sigma)}} \qquad \mu_2 = \sqrt{\frac{\nu^2}{2}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right) - 1 - \varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{2\,(1+\sigma)}}$$

so daß also

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = \nu^2\left(1 - \varepsilon\,\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right), \quad \mu_1^2 - \mu_2^2 = 2 + \varepsilon\,\frac{2+3\,\sigma}{1+\sigma} \quad . \; . \quad \text{(IV a)}$$

und ferner:

$$\mathfrak{T}_{1_2} = -\,\frac{\gamma}{2}\,a^2\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\,\varepsilon\right), \qquad \mathfrak{T}_{1_1} = -\,c_1\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\,\varepsilon\right),$$

$$\mathfrak{T}_{1_0} = -\,c_2\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\,\varepsilon\right) - \gamma\,a^2\,\varepsilon\,\frac{2+\sigma}{1-\sigma^2}$$

während $C_1 \ldots C_4$ die vier willkürlichen Integrationskonstanten bezeichnen.

Aus T_1 lassen sich die übrigen Spannungs- und Formänderungsgrößen ohne Schwierigkeit bestimmen. Man erhält nach (5a), (7a) zunächst für S:

$$S = S^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + S^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + S^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + S^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{S},$$

wo mit der Abkürzung:

$$\frac{1 - \sigma + \varepsilon \frac{2 - \sigma^2}{1 + \sigma}}{\nu^2} = \varrho_1.$$

$$\left.\begin{aligned} S^{(1)} &= C_2 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} + C_3 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \qquad & S^{(3)} &= C_4 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} - C_1 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \\ S^{(2)} &= C_1 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} + C_4 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \qquad & S^{(4)} &= C_3 \mu_1 \frac{\varrho_1 - 1}{1 - 2\varepsilon} - C_2 \mu_2 \frac{\varrho_1 + 1}{1 - 2\varepsilon} \\ & & \mathfrak{S} &= (\gamma a^2 \xi + c_1)\left(1 - \varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Sodann folgt aus (8) für T_2, wenn

$$2 + \sigma + \varepsilon \frac{5 + 16\sigma + 9\sigma^2}{1 + \sigma} = \varrho_2$$

eingeführt wird:

$$T_2 = T_2^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + T_2^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + T_2^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + T_2^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{T}_{2_2} \xi^2 + \mathfrak{T}_{2_1} \xi + \mathfrak{T}_{2_0}$$

wo: $T_2^{(1)} = - C_1 \varrho_2 + 2 C_4 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$, $\quad T_2^{(2)} = - C_2 \varrho_2 + 2 C_3 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$,
$T_2^{(3)} = - C_3 \varrho_2 - 2 C_2 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$, $\quad T_2^{(4)} = - C_4 \varrho_2 - 2 C_1 \mu_1 \mu_2 (1 + 5\varepsilon)$

und:

$$\mathfrak{T}_{2_2} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} \gamma \frac{a^2}{2}, \quad \mathfrak{T}_{2_1} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} c_1, \quad \mathfrak{T}_{2_0} = \gamma a^2 + \varepsilon \left(- 2\gamma a^2 \frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2} + c_2 \frac{\sigma}{1 - \sigma^2}\right).$$

Für das Torsionsmoment H_1 erhält man nach (IIIc):

$$H_1 = H_1^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + H_1^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{H} + H_1^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + H_1^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi)$$

wo:

$$\begin{aligned} H_1^{(1)} &= C_2 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] + C_3 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(2)} &= C_1 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] + C_4 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(3)} &= C_4 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] - C_1 \mu_2 [\varrho_1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \\ H_1^{(4)} &= C_3 \mu_1 [\varrho_1 - 3\varepsilon(1 - \varrho_1)] - C_2 \mu_2 [\varrho^1 + 3\varepsilon(1 + \varrho_1)] \end{aligned}$$

$$\mathfrak{H} = - a(\gamma a^2 \xi + c_1) \varepsilon \frac{1 + 2\sigma}{1 + \sigma},$$

während die Spannungsmomente $G_1 G_2$ und die Querkraft N_1 sich nach (IIIc), (IIc), (7) direkt bestimmen aus:

$$G_1 = - a T_1 - a \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c^2\right)$$

$$G_2 = - a \varepsilon T_2 - \sigma a T_1 (1 + 2\varepsilon) - a\sigma \left(a^2 \gamma \frac{\xi^2}{2} + c_1 \xi + c^2\right)$$

$$N_1 = S - a^2 \gamma \xi - c_1.$$

Hiernach werden die Partikulärlösungen:

$$G_1 = \frac{a\varepsilon}{1 - \sigma^2}\left[- (2 - \sigma^2)\left(\gamma \frac{a^2}{2} \xi^2 + c_1 \xi + c_2\right) + \gamma a^2 (2 + \sigma)\right]$$

$$G_2 = \frac{a\varepsilon}{1 - \sigma^4}\left[- \sigma\left(\gamma \frac{a^2}{2} \xi^2 + c_1 \xi + c_2\right) + \gamma a^2 (1 + 2\sigma)\right]$$

$$\mathfrak{N}_1 = - \varepsilon \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^4} (\gamma a^2 \xi + c_1).$$

Für die Querkraft N_2 folgt nach (IIIa):

$$N_2 = N_2^{(1)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + N_2^{(2)} \sin(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + N_2^{(3)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Sin}(\mu_1 \xi) + N_2^{(4)} \cos(\mu_2 \xi) \mathfrak{Cof}(\mu_1 \xi) + \mathfrak{N}_{2_2} \xi^2 + \mathfrak{N}_{2_1} \xi + \mathfrak{N}_{2_0}$$

wo mit

$$\varrho_3 = 1 + \varepsilon \frac{3 + 9\sigma + 5\sigma^2}{1 + \sigma},$$

$N_2^{(1)} = - C_1 \varrho_3 + 6 C_4 \mu_1 \mu_2 \varepsilon$, $\quad N_2^{(2)} = - C_2 \varrho_3 + 6 C_3 \mu_1 \mu_2 \varepsilon$,
$N_2^{(3)} = - C_3 \varrho_3 + 6 C_2 \mu_1 \mu_2 \varepsilon$, $\quad N_2^{(4)} = - C_4 \varrho_3 - 6 C_1 \mu_1 \mu_2 \varepsilon$,

$$\mathfrak{N}_{2_2} = \mathfrak{T}_{2_2} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} \gamma \frac{a^2}{2}, \quad \mathfrak{N}_{2_1} = \mathfrak{T}_{2_1} = \varepsilon \frac{\sigma}{1 - \sigma^2} c_1, \quad \mathfrak{N}_{2_0} = \varepsilon\sigma \left(- \gamma a^2 \frac{1 + 2\sigma}{1 - \sigma^2} + \frac{c_2}{1 - \sigma^2}\right)$$

Für die Verschiebungen u, v, w erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{E\,\delta}{a}\,u = u^{(1)} \sin(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\,\xi) + u^{(2)} \sin(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1\,\xi) + u^{(3)} \cos(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu_1\,\xi) + u^{(4)} \cos(\mu_2\,\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu_1\,\xi) + \mathfrak{u}_3\,\xi^3 + \mathfrak{u}_2\,\xi^2 + \mathfrak{u}_1\,\xi + c_1'$$

wo, wenn:

$$\frac{1-\sigma^2}{\nu^2} - \sigma\,\varrho_1\,(2 + 3\,\varepsilon) + \sigma\,(1 + 4\,\varepsilon) = \varrho_4',$$

$$\frac{1-\sigma^2}{\nu^2} - \sigma\,\varrho_1\,(2 + 3\,\varepsilon) - \sigma\,(1 + 4\,\varepsilon) = \varrho_4'',$$

$$u^{(1)} = \mu_1\,C_2\,\varrho_4' + \mu_2\,C_3\,\varrho_4'', \quad u^{(2)} = \mu_1\,C_1\,\varrho_4' + \mu_2\,C_4\,\varrho_4'',$$
$$u^{(3)} = \mu_1\,C_4\,\varrho_4' - \mu_2\,C_1\,\varrho_4'', \quad u^{(4)} = \mu_1\,C_3\,\varrho_4' - \mu_2\,C_2\,\varrho_4''$$

und:

$$\mathfrak{u}_3 = -\gamma\,\frac{a^2}{6}\,(1 - 2\,\varepsilon), \quad \mathfrak{u}_2 = -\frac{c_1}{2}\,(1 - 2\,\varepsilon), \quad \mathfrak{u}_1 = -c_2\,(1 - 2\,\varepsilon) - \gamma\,a^2\left[\sigma + \varepsilon\,\frac{2 - \sigma - 2\,\sigma^3}{1 + \sigma}\right],$$

während c_1' eine willkürliche Translationskonstante.

Für v folgt der gleiche Ausdruck, nur daß an Stelle der $u^{(1)}, u^{(2)} \ldots, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \ldots$ mit

$$2 + \sigma + 2\,\varepsilon\,\frac{1 + 3\,\sigma + \sigma^2}{1 + \sigma} = \varrho_5$$

die Werte treten:

$$v_1^{(1)} = -C_1\,\varrho_5 + 2\,\varepsilon\,C_4\,\mu_1\,\mu_2\,\frac{3+\sigma}{1+\sigma}, \quad v_2^{(2)} = -C_2\,\varrho_5 + 2\,\varepsilon\,C_3\,\mu_1\,\mu_2\,\frac{3+\sigma}{1+\sigma},$$

$$v^{(3)} = -C_3\,\varrho_5 - 2\,\varepsilon\,C_2\,\mu_1\,\mu_2\,\frac{3+\sigma}{1+\sigma}, \quad v^{(4)} = -C_4\,\varrho_5 - 2\,\varepsilon\,C_1\,\mu_1\,\mu_2\,\frac{3+\sigma}{1+\sigma},$$

$$\mathfrak{v}_4 = \frac{\mathfrak{u}_3}{4}, \quad \mathfrak{v}_3 = \frac{\mathfrak{u}_2}{3}, \quad \mathfrak{v}_2 = \frac{\mathfrak{u}_1}{2} + (1 + \sigma)\,\gamma\,a^2\left(1 - \varepsilon\,\frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2}\right),$$

$$\mathfrak{v}_1 = c_1' + 2\,(1 + \sigma)\left(1 - \varepsilon\,\frac{2 - \sigma}{1 - \sigma^2}\right) c_1.$$

Auch hier tritt eine weitere, willkürliche Translationskonstante c_2' auf.

Die radiale Verschiebung w ist endlich gegeben durch:

$$w = \frac{T_2 - T_1\,\sigma}{E\,\delta} - v.$$

Von Wichtigkeit ist ferner die Größe $w' = \dfrac{d\,w}{d\left(\frac{x}{a}\right)}$, die die Drehung der Erzeugenden bei der Deformation darstellt. Für diese folgt aus (IIa):

$$w' = -a^2\,\tau - v' = -a^2\,\tau - a\,\omega - u$$

und somit nach (Ia):

$$w' = -\frac{a^2}{D\,(1 - \sigma)}\,(H + 3\,a\,\varepsilon\,S) - u.$$

Durch die im vorstehenden angegebenen Werte sämtlicher Spannungs- und Deformationsgrößen ist der Spannungszustand vollständig und eindeutig bestimmt und es läßt sich jetzt folgendes erkennen:

Die $C_1 \ldots\ldots C_4$ enthaltenden Teile der Lösungen, die die Integrale des homogenen Gleichungssystems darstellen, nehmen von den Rohrenden aus rasch ab, sind jedoch für die Spannungsverteilung an den letzteren bezw. den Versteifungsringen von Bedeutung. Gegen die Mitte jeder Rohröffnung hin werden jedoch die durch die deutschen Buchstaben gekennzeichneten Partikulärlösungen fast allein maßgebend sein. Nun liefern die letzteren für die Biegungsmomente $G_1\,G_2\,H$, sowie für $N_1\,N_2$ Werte von der Größenordnung $\varepsilon\,a\,T$ bezw. $\varepsilon\,T$, d. h. da $\varepsilon = \dfrac{\delta^2}{12\,a^2}$ meist sehr klein, ist der Einfluß der Biegungssteifigkeit der Rohrwandung selbst sehr gering.

Noch deutlicher wird dies, wenn man den Quotienten $\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{T}}$ bildet, der das Herausrücken der Stützlinie aus der Mittelfläche angibt. Man erhält z. B. in der Mitte eines an seinen beiden Enden frei gestützten Rohres, wenn

$$\mathfrak{T}_{1(0)} = \gamma\,\frac{l^2}{8}, \quad \mathfrak{T}_{2(0)} = \gamma\,a^2$$

die Längsspannungen ohne Berücksichtigung der Biegungsfestigkeit bezeichnen:

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{T}_{1(0)}} = \delta \frac{\delta}{12\,a}\left(\frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2} + 8\,\frac{a^2}{l^2}\,\frac{2+\sigma}{1-\sigma^2}\right); \qquad \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{T}_{2(0)}} = \delta \frac{\delta}{12\,a}\left(\frac{1+2\sigma+\sigma^3\,\frac{l^2}{8\,a^2}}{1-\sigma^2}\right)$$

d. h. für das schon verhältnismäßig dickwandige Rohr von $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{20}$ wird bei $\frac{a}{l} = \frac{1}{5}$, $\sigma = 0{,}3$:

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{T}_{1(0)}} = \sim \frac{1}{80}\,\delta = \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{T}_{2(0)}}.$$

Es ist jedoch bemerkenswert, daß mit wachsender Rohrlänge unter sonst gleichen Umständen der Einfluß von $\mathfrak{S}_2$ zu-, der von $\mathfrak{S}_1$ hingegen abnimmt.

4. Auilagerbedingungen. Die für die Bestimmung der 8 Konstanten $C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ c_1\ c_2\ c_1'\ c_2'$ maßgebenden Randbedingungen lauten für die praktisch vorkommenden Stützungen eines Rohrendquerschnitts wie folgt:

In einem vollkommen eingespannten Endquerschnitt muß sein:

$$u = 0 \qquad v = 0 \qquad w = 0 \qquad w' = \frac{d\,w}{d\left(\frac{x}{a}\right)} = 0.$$

Ist hingegen die Stützung derart, daß das Rohr durch einen starren Deckel abgeschlossen ist, der nur vertikal gestützt ist, jedoch sich ungehindert in der Längsrichtung verschieben und sich auch neigen kann, so lauten bei gelenkigem Anschluß des Rohrs an den Deckel die Bedingungen im Endquerschnitt:

$$G_1 = 0 \qquad T_1 = 0 \qquad w = 0 \qquad v = 0$$

hingegen bei biegungsfestem Anschluß des Rohrs an den Deckel:

$$G_1 + a\,T_1 = 0 \qquad w' = 0 \qquad w = 0 \qquad v = 0.$$

Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall des kontinuierlichen Rohrstranges, der mittels starrer Versteifungsringe unsenkbar gelagert ist. Bei diesem sind an jeder Mittelstütze folgende Bedingungen zu befriedigen, wenn die an derselben zusammenstoßenden Oeffnungen den Index m bezw. $m+1$ ebenso wie die zugehörigen Spannungs- und Deformationsgrößen erhalten:

$$\begin{array}{llll} T_{1(m)} = T_{1(m+1)} & u_{(m)} = u_{(m+1)} & v_{(m)} = 0 & w_{(m)} = 0 \\ G_{1(m)} = G_{1(m+1)} & w_{(m)} = w_{(m+1)}' & v_{(m+1)} = 0 & w_{(m+1)} = 0 \end{array}$$

Man erhält also an jeder Mittelstütze 8, an jeder Endstütze 4, im ganzen also bei n Oeffnungen: $8(n-1) + 2 \cdot 4 = 8n$ Gleichungen, denen in jeder Oeffnung 8 zu bestimmende Konstanten, im ganzen also $8n$ Unbekannte gegenüberstehen; die Zahl der letzteren reduziert sich jedoch bei Symmetrie auf die Hälfte.

5. Der rotationssymmetrische Spannungszustand infolge von $h\,\gamma$. Zu den in **2** bis **4** berechneten Spannungen sind nun nach **1** noch die sich infolge des Störungsgliedes $\gamma\,h$ ergebenden Spannungen zu überlagern. Da dieselben in bezug auf die Rohrachse gleichmäßig verteilt sind, fallen in den Gl. (I), (II), (III) alle Ableitungen nach φ fort; ebenso verschwinden auch $N_2\ H\ S\ \omega\ \tau\ v$. Wir erhalten daher in diesem Falle folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{ll} T_1 = \frac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) & G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\,\varkappa_2) + T_1\,a\,\varepsilon \\ T_2 = \frac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) & G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\,\varkappa_1) \end{array}\right\} \quad . \quad (\mathrm{I\,d}).$$

$$a\,\varepsilon_1 = u', \quad a\,\varepsilon_2 = w'; \qquad a^2\varkappa_1 = w'', \quad \varkappa_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II\,d}).$$

$$T_1' = 0, \text{ somit } T_1 = c, \quad N_1' - T_2 + a\,\gamma\,h = 0, \quad G_1' - N_1\,a = 0 \quad . \quad (\mathrm{III\,d})$$

Mit Rücksicht auf $\varkappa_2 = 0$ (nach II d) folgt für Gl. (I d):

$$T_1 = \frac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) = c \qquad G_1 = -D\varkappa_1 + T_1\,a\,\varepsilon = -D\varkappa_1 + c\,a\,\varepsilon$$

$$T_2 = \frac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) \qquad G_2 = -D\,\sigma\,\varkappa_1.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in folgender Weise auf eine Gleichung zusammenziehen.

Die Elimination von N_1 aus (III) ergibt:

$$G_1'' - a T_2 + a^2 \gamma h = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(IIIc)},$$

hierzu mit $T_1 = c$ und (IId)

$$\varepsilon_2'' = a \varkappa_1; \quad \varkappa_2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(IIc)}.$$

Ersetzt man in (IIc) Dehnungen und Krümmungsänderungen mittels (Id), so erhält man:

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2'' - T_1'' \sigma}{E \delta} = \frac{G_1^{(IV)}}{E \delta a} = a \varkappa_1 = \frac{a}{D} (c a \varepsilon - G_1),$$

mithin:

$$G_1^{(IV)} + \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) G_1 - c a (1 - \sigma^2) = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung lautet:

$$G_1 = C_1 \sin(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + C_2 \sin(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi) + C_3 \cos(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + C_4 \cos(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi) + c a \varepsilon,$$

wobei

$$\mu = \frac{\nu}{\sqrt{2}}, \quad \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) = \nu^4.$$

Nach Bestimmung von G_1 folgt für T_2 nach (IIIc):

$$T_2 = \frac{G_1''}{a} + a \gamma h$$
$$= \frac{\nu^2}{a} [-C_4 \sin(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) - C_3 \sin(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi) + C_2 \cos(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + C_1 \cos(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi)],$$
$$+ a \gamma h$$

ferner für G_2 nach (Id):

$$G_2 = \sigma G_1 - \sigma c a \varepsilon$$
$$= \sigma [C_1 \sin(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + C_2 \sin(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi) + C_3 \cos(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + C_4 \cos(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi)].$$

Für die Querkraft N_1 liefert die letzte der Gleichgewichtsbedingungen (IIId):

$$N_1 = \frac{\nu}{a \sqrt{2}} [(C_2 - C_3) \sin(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + (C_1 - C_4) \sin(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi) + (C_1 + C_4) \cos(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + (C_2 + C_3) \cos(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi)],$$

während man für die Verschiebungen erhält:

$$w = a \varepsilon_2 = \frac{a}{E \delta} (T_2 - T_1 \sigma)$$

$$u = a \int \varepsilon_1 d\xi = \frac{a}{E \delta} \int (T_1 - T_2 \sigma) d\xi = \frac{a}{E \delta} \int \{c - \sigma (N_1' + \gamma a h)\} d\xi$$
$$= -\frac{a \sigma}{E \delta} N_1 + \frac{a}{E \delta} (c - \sigma a \gamma h) \xi + c' \quad (c' = \text{willk. Konst.})$$

und die Tangentendrehung w' sich ergibt zu:

$$w' = \frac{a}{E \delta} T_2'$$
$$= \frac{\nu^3}{E \delta \sqrt{2}} \begin{bmatrix} -(C_2 + C_3) \sin(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) - (C_1 + C_4) \sin(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi) \\ + (C_1 - C_4) \cos(\mu \xi) \mathfrak{Sin}(\mu \xi) + (C_2 - C_3) \cos(\mu \xi) \mathfrak{Cos}(\mu \xi) \end{bmatrix}$$

Hiermit sind sämtliche Spannungen und Formänderungen bestimmt, sobald noch die Werte der 6 Konstanten $C_1 C_2 C_3 C_4 c c'$ [1]) aus den im folgenden angegebenen Randbedingungen ermittelt sind.

Die Bedingungen, denen die Spannungen und Formänderungen in einem Endquerschnitt genügen müssen, sind die folgenden:

In einem eingespannten Endquerschnitt muß sein:

$$u = 0 \qquad w = 0 \qquad w' = 0.$$

Bei Abschluß durch starre, nur vertikal gestützte, drehbare, in der Längsrichtung frei verschiebliche Deckel hat man, wenn das Rohrende gelenkig an den Deckel angeschlossen ist:

$$G_1 = 0 \qquad T_1 = 0 \qquad w = 0,$$

während bei biegungsfestem Anschluß des Rohres an den Deckel die Bedingungen lauten:

$$w' = 0 \qquad T_1 = 0 \qquad w = 0.$$

---

[1]) Diese sind natürlich nicht identisch mit den in Lösungen unter 2. auftretenden Konstanten.

Bei kontinuierlichen Rohrsträngen sind über jeder Mittelstütze folgende 6 Bedingungen zu erfüllen:

$$T_{1(m)} = T_{1(m+1)} \qquad u_{(m)} = u_{(m+1)} \qquad w_m = 0$$
$$G_{1(m)} = G_{1(m+1)} \qquad w'_{(m)} = w'_{(m+1)} \qquad w_{m+1} = 0,$$

so daß man also bei n Oeffnungen: $6(n-1) + 2 \cdot 3 = 6n$ Gleichungen für die $6n$ Konstanten — bei Symmetrie nur die Hälfte — erhält.

Nach Bestimmung der Konstanten und Einsetzung derselben in die obigen Spannungen und Deformationen können die unter 2. und 3. bestimmten Spannungszustände überlagert und so die Gesamtspannungen infolge des Flüssigkeitsgewichtes und Ueberdruckes erhalten werden, wobei bemerkt sei, daß, wenn kein Ueberdruck vorhanden, in den Formeln unter 3. $h = a$ einzusetzen ist.

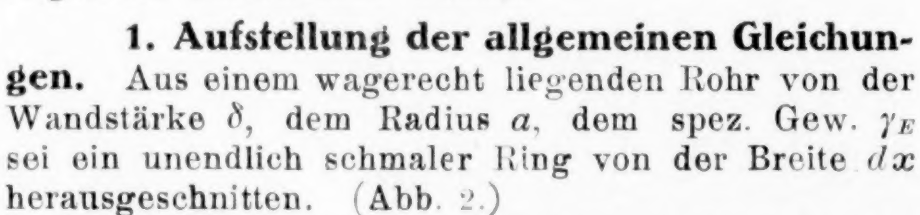
II. Spannungen infolge des Rohreigengewichts im wagerecht liegenden Rohr.

Die Spannnngen des Rohreigengewichts selbst werden im allgemeinen gegenüber denen des Flüssigkeitsgewichts und Ueberdrucks zurücktreten.

Immerhin besitzt z. B. ein Rohrstück von 1 cm Länge bei einer Wandstärke δ einem Radius a, spez. Gew. γ_E ein Gewicht $2\pi a\delta\gamma_E$, die eingeschlossene Flüssigkeit vom spez. Gew. γ_F hingegen ein solches von $\pi a^2\gamma_F$. Die Gewichte verhalten sich also wie

$$\frac{G_E}{G_F} \backsim \frac{2\pi a\delta\gamma_E}{\pi a^2\gamma_F} \backsim \frac{2\delta}{a}\frac{\gamma_E}{\gamma_F} = 15{,}6\,\frac{\delta}{a}$$

für ein eisernes ($\gamma_E = 7{,}8$ t/m³) Rohr mit Wasserfüllung ($\gamma_F = 1$ t/m³).



Für $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{40}$ würde hiernach das Rohrgewicht etwa 39 vH des Flüssigkeitsgewichts und für $\frac{\delta}{a} = \frac{1}{100}$ noch etwa 16 vH des letzteren betragen. Es sind also infolge des Rohrgewichts immerhin nicht ganz unbeträchtliche Spannungen zu erwarten, die wir im folgenden untersuchen wollen.

Abb. 2

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Aus einem wagerecht liegenden Rohr von der Wandstärke δ, dem Radius a, dem spez. Gew. γ_E sei ein unendlich schmaler Ring von der Breite dx herausgeschnitten. (Abb. 2.)

Dann besitzt ein Bogenelement desselben von der Länge $a\,d\varphi$ das Gewicht $\gamma_E\,\delta\,a\,d\varphi\,dx$, dessen Komponenten in der Y- bezw. Z-Richtung sind:

$$Y = -\gamma_E\,\delta\,a\,d\varphi\,dx\sin\varphi = -\gamma_E'\,a^2 d\varphi\,dx\sin\varphi$$
$$Z = +\gamma_E\,\delta\,a\,d\varphi\,dx\cos\varphi = +\gamma_E'\,a^2 d\varphi\,dx\cos\varphi,$$

wenn $\gamma_E\,\frac{\delta}{a} = \gamma_E'$ gesetzt wird.

Nach S. 342 lauten daher die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} T_1' - S_2' = 0 & H_1' - G_2' + N_2 a = 0 \\ S_1' + T_2' + N_2 - a^2\gamma_E'\sin\varphi = 0 & G_1' + H_2 - N_1 a = 0 \\ N_1' + N_2' - T_2 + a^2\gamma_E'\cos\varphi = 0 & -H_2 + (S_1 + S_2)\,a = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(III)},$$

während die Formänderungsgleichungen (I) (II) unverändert bleiben.

Man überzeugt sich nun leicht, daß die obigen Gleichungen ebenfalls durch den sinus- bezw. cosinusförmigen Ansatz befriedigt werden können und daß dann die Gleichgewichtsbedingungen die Form annehmen[1]):

$$T_1' + S(1+\varepsilon) + \frac{H}{a} = 0$$
$$S' - T_2 + N_2 - a^2\gamma_E' = 0 \qquad H_1' + G_2 + N_2 a = 0$$
$$N_1' + N_2 - T_2 + a^2\gamma_E' = 0 \qquad G_1' - H - Sa\varepsilon - N_1 a = 0$$

während die Formänderungen sich wieder nach (Ia) (IIa) bestimmen.

[1]) Wiederum unter Fortlassung der Striche über den Buchstaben.

Im folgenden soll nun der Einfluß des in der zweiten Gleichgewichtsbedingung auftretenden Störungsgliedes getrennt von dem der dritten Gleichung verfolgt werden.

2. Diskussion der Spannungen. a) Einfluß des Störungsgliedes $+a^2\gamma_E'$ der dritten Gleichgewichtsbedingung. Wenn, wie wir jetzt zunächst annehmen, das Störungsglied $-a^2\gamma_E'$ in der Y-Richtung nicht vorhanden ist und nur in der Z-Richtung ein solches von der Größe $+a^2\gamma_E'$, so stimmen die Gl. (IIIf) vollkommen mit den Gl. (IIIa) überein, wenn in den letzteren statt γ das reduzierte spez. Gew. des Rohrmaterials $\gamma_E' = \gamma_E \frac{\delta}{a}$ eingesetzt wird. Hieraus geht hervor, daß das Störungsglied in der Z-Richtung $+a^2\gamma_E'$ Spannungen hervorruft, die aus den im I. Abschnitt angegebenen Spannungen durch Multiplikation mit dem Verhältnis $\frac{\gamma_E'}{\gamma}$ abgeleitet werden können. Die Konstanten $C_1 \ldots C_4\, c_1\, c_2\, c_1'\, c_2'$ verkleinern sich also im Verhältnis $\frac{\gamma_E'}{\gamma}$ und in den Partikularlösungen ist statt γ_E' statt γ einzusetzen.

b) Einfluß des Störungsgliedes $-a^2\gamma_E'$ der zweiten Gleichgewichtsbedingung. Dieser Einfluß ist zwar nicht mehr so einfach zu übersehen, wie der des Gliedes in der Z-Richtung. Nimmt man jedoch mit den Gl. (IIIf) sowie den Formänderungsgleichungen (Ia) (IIa) die gleichen Transformationen vor, die S. 342 bis 343 zur Aufstellung der Hauptgleichung für T_1 geführt haben, so ergibt sich für T_1 genau dieselbe Gl. (IV) wie oben, so daß also das Störungsglied $-a^2\gamma_E'$ der Y-Richtung dem Sinne und der Größe nach genau die gleichen Spannungen T_1 hervorruft wie $+a^2\gamma_E'$ der Z-Richtung. Dasselbe ergibt sich für die Größen $S_1\, G_1\, N_1\, H_1$ da die Gleichungen, aus denen sie nach Bestimmung von T_1 gefunden werden, dieselben bleiben.

Anders verhält es sich jedoch mit den Größen $\overline{T_2}\, \overline{N_2}\, \overline{G_2},\, \overline{u_1}\, \overline{v}\, \overline{w})$ für die zwar die homogenen Lösungen dieselben bleiben, die in deutschen Buchstaben geschriebenen Lösungen jedoch folgende Werte annnehmen[1]):

$$\mathfrak{T}_{2E} = -\gamma_E' \frac{a^2}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2}\left(\frac{\gamma_E'}{2} a^2 \xi^2 + c_1^* + c_2^*\right) + \gamma_E' a^2 \left(1 - 2\varepsilon \frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2}\right)$$

$$\mathfrak{N}_{2E} = -\gamma_E' \frac{a^2\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma^2}\left(\frac{\gamma_E'}{2} a^2 \xi^2 + c_1^* \xi^2 + c_2^*\right) - \gamma_E' a^2 \varepsilon\sigma \frac{1+2\sigma}{1-\sigma^2}$$

$$\mathfrak{G}_{2E} = -\gamma_E' \frac{a^3\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{a\varepsilon}{1-\sigma^2}\left[-\sigma\left(\frac{\gamma_E' a^2}{2}\xi^2 + c_1^*\xi + c_2^*\right) + \gamma_E' a^2 (1+2\sigma)\right]$$

$$\frac{E\delta}{a}\mathfrak{u}_E = \mathfrak{u}_{3E}\xi^3 + \mathfrak{u}_{2E}\xi^2 + \mathfrak{u}_{1E}\xi + c_1'^*$$

$$= \sigma\gamma_E' \frac{a^2\xi}{1+\varepsilon} - (1-2\varepsilon)\left(\gamma_E' \frac{a^2}{6}\xi^3 + \frac{c_1^*}{2}\xi^2 + c_2^*\xi\right) - \gamma_E' a^2 \xi\left[\sigma + \varepsilon\frac{2-\sigma-2\sigma^3}{1+\sigma}\right] + c_1'^*$$

$$\frac{E\delta}{a}\mathfrak{v}_E = \mathfrak{v}_{4E}\xi^4 + \mathfrak{v}_{3E}\xi^3 + \mathfrak{v}_{2E}\xi^2 + \mathfrak{v}_{1E}\xi + c_2'^*$$

$$= \sigma\gamma_E' \frac{a^2\xi^2}{2(1+\varepsilon)} - (1-2\varepsilon)\left(\gamma_E' \frac{a^2\xi^4}{24} + \frac{c_1^*\xi^3}{6} + \frac{c^{2*}\xi^2}{2}\right)$$

$$-\gamma a^2 \xi^2\left[-1 - \frac{\sigma}{2} + \varepsilon\left(\frac{2-\sigma}{1-\sigma} + \frac{2-\sigma-\sigma^3}{2(1+\sigma)}\right)\right] + 2(1+\sigma)\left(1 - \varepsilon\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right)c_1^*\xi + c_1'^*\xi + c_2'^*$$

$$\frac{E\delta}{a}\mathfrak{w}_E = \mathfrak{T}_{2E} - \mathfrak{T}_{1E} - \mathfrak{v}_E \frac{E\delta}{a}.$$

c) Gesamtspannungen und Formänderungen infolge des Rohrgewichts. Nach vorstehendem lassen sich nun die Gesamtspannungen und Formänderungen infolge des Rohrgewichts, die durch den Index $_g$ gekennzeichnet seien, durch einfache Superposition der den beiden Störungsgliedern entsprechenden Spannungszustände ermitteln. Man findet auf diesem Wege folgende Werte:

$$\mathfrak{T}_{1g} = \mathfrak{T}_{1_2}\xi^2 + \mathfrak{T}_{1_1}\xi + \mathfrak{T}_{1_0},$$

wo

$$\mathfrak{T}_{1_2} = -\gamma_E' a^2\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\varepsilon\right), \qquad \mathfrak{T}_{1_1} = -c_{1g}\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\varepsilon\right),$$

$$\mathfrak{T}_{1_0} = -c_{2g}\left(1 - \frac{2-\sigma^2}{1-\sigma^2}\varepsilon\right) - 2\gamma_E' a^2 \varepsilon \frac{2+\sigma}{1-\sigma^2};$$

---

[1]) Der Index $_E$ soll andeuten, daß es sich um Teillösungen infolge Eigengewicht des Rohres handelt.

$$\mathfrak{S}_g = (2\,\gamma_E'\,a^2\,\xi + c_{1g})\left(1 - \varepsilon\,\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right), \qquad \mathfrak{T}_{2g} = \mathfrak{T}_{2_2}\,\xi^2 + \mathfrak{T}_{2_1}\,\xi + \mathfrak{T}_{2_0}\,,$$

wo

$$\mathfrak{T}_{2_2} = \varepsilon\,\frac{\sigma}{1-\sigma^2}\,\gamma_E'\,a^2, \quad \mathfrak{T}_{2_1} = \frac{\varepsilon\,\sigma}{1-\sigma^4}\,c_{1g}, \quad \mathfrak{T}_{2_0} = \gamma_E'\,a^2 + \varepsilon\left(-\gamma_E'\,a^2\,\frac{1+3\,\sigma^2}{1-\sigma^4} + c_{2g}\,\frac{\sigma}{1-\sigma^2}\right),$$

$$\mathfrak{G}_{1g} = \frac{a\,\varepsilon}{1-\sigma^4}\left[-(2-\sigma^2)\,(\gamma_E'\,a^2\,\xi^2 + c_{1g}\,\xi + c_{2g}) + 2\,\gamma_E'\,a^2\,(2+\sigma)\right]$$

$$\mathfrak{G}_{2g} = \frac{a\,\varepsilon}{1-\sigma^2}\left[-\sigma\,(\gamma_E'\,a^2\,\xi^2 + c_{1g}\,\xi + c_{2g}) + \gamma_E'\,a^2\,(1 + 4\,\sigma + \sigma^2)\right]$$

$$\mathfrak{H}_g = -a\,(2\,\gamma_E'\,a^2\,\xi + c_{1g})\,\varepsilon\,\frac{1+2\,\sigma}{1+\sigma}$$

$$\mathfrak{N}_{1g} = -\varepsilon\,\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\,(2\,\gamma_E'\,a^2\,\xi + c_{1g}), \quad \mathfrak{N}_{2g} = \frac{\varepsilon\,\sigma}{1-\sigma^2}\,(\gamma_E'\,a^2\,\xi^2 + c_{1g}\,\xi + c_{2g}) + \varepsilon\,\gamma_E'\,a^2\,\frac{1-2\,\sigma-5\,\sigma^2}{1-\sigma^2}$$

und schließlich für die Verschiebungen:

$$\frac{E\,\delta}{a}\,\mathfrak{u}_g = -(1-2\,\varepsilon)\left(\gamma_E'\,\frac{a^2}{3}\,\xi^3 + \frac{c_{1g}}{2}\,\xi^2 + c_{2g}\,\xi\right) - \gamma_E'\,a^2\,\xi\left[\sigma\,(1+\varepsilon) + 2\,\varepsilon\,\frac{2-\sigma-\sigma^3}{1+\sigma}\right]$$

$$\frac{E\,\delta}{a}\,\mathfrak{v}_g = \mathfrak{v}_{4g}\,\xi^4 + \mathfrak{v}_{3g}\,\xi^3 + \mathfrak{v}_{2g}\,\xi^2 + \mathfrak{v}_{1g}\,\xi + c_g'\,\xi + c_{2g},$$

wo

$$\mathfrak{v}_{4g} = \frac{-\gamma_E'\,a^2}{12}\,(1-2\,\varepsilon), \qquad \mathfrak{v}_{3g} = \frac{-c_{1g}}{6}\,(1-2\,\varepsilon)$$

$$\mathfrak{v}_{2g} = \frac{-c_{2g}}{2}\,(1-2\,\varepsilon) + \frac{\gamma_E'\,a^2}{2}\left[4 + 3\,\sigma + \varepsilon\,\frac{-12 + \sigma + 2\,\sigma^2 + 3\,\sigma^3 - 2\,\sigma^4}{1-\sigma^2}\right]$$

$$\mathfrak{v}_{1g} = 2\,(1+\sigma)\left(1 - \varepsilon\,\frac{2-\sigma}{1-\sigma^2}\right)c_{1g}$$

$$\frac{E\,\delta}{a}\,\mathfrak{w}_g = \mathfrak{T}_{2g} - \mathfrak{T}_{1g} - \mathfrak{v}_g\,\frac{E\,\delta}{a},$$

sowie für die Tangentendrehung (vergl. S. 345)

$$\frac{E\,\delta}{a}\,\mathfrak{w}' = -\frac{12\,a\,(1+\sigma)}{\delta^2}\,\mathfrak{H}_g - 3\,(1+\sigma)\,\mathfrak{S}_g - \mathfrak{u}_g\,\frac{E\,\delta}{a},$$

während die homogenen Lösungen formal ungeändert bleiben, da nur die in denselben auftretenden Konstanten $C_1 \ldots C_4$ durch $C_{1g} \ldots C_{4g}$ zu ersetzen sind.

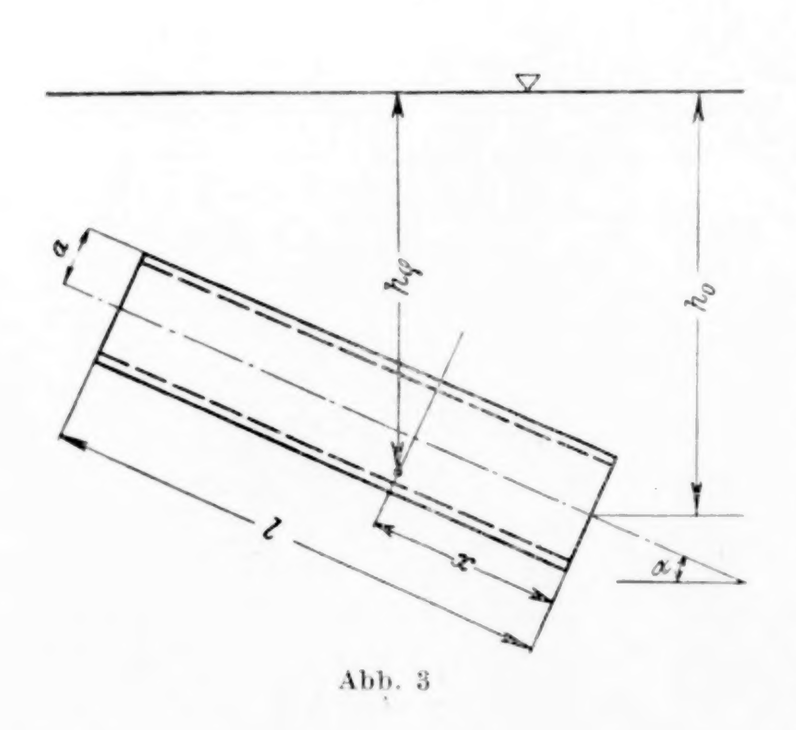


Abb. 3

III. Das geneigt liegende Rohr.

1. Spannungen infolge des Flüssigkeitsgewichts. Nachdem im vorstehenden die Spannungen infolge des Flüssigkeits- und Eigengewichts für das wagerecht liegende Rohr ermittelt worden sind, soll nunmehr angenommen werden, daß die Rohrachse unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt liegt. In diesem Falle beträgt nach Abb. 3 der Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit in der jetzt schräg gemessenen Entfernung x vom unteren Rohrende, an dem — auf der Achse — die Druckhöhe h_0 vorhanden sei,

$$p = \gamma h_\varphi = \gamma\,[h_0 - x \sin\alpha + a\cos\varphi\cos\alpha] = \gamma\,[h_0 - h_1\,\xi + a\cos\varphi\cos\alpha],$$

wenn $h_1 = a \sin\alpha$ die Druckhöhenänderung in der Rohrachse auf eine schräge Länge gleich dem Rohrradius darstellt. Demnach lauten dann die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} T_1' - S_2^{\cdot} = 0 & H_1' - G_2^{\cdot} + N_2\,a = 0 \\ S_1' + T_2^{\cdot} + N_2 = 0 & G_1' + H_2^{\cdot} - N_1\,a = 0 \\ N_1' + N_2^{\cdot} - T_2 + a\,\gamma\,(h_0 - h_1\,\xi + a\cos\alpha\cos\varphi) = 0 & -H_2 + (S_1 + S_2)\,a = 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{III\,g}),$$

während die Formänderungsbedingungen (I) (II) ungeändert bleiben.

Man erkennt nun aus der Form des Störungsgliedes in (IIg), daß die Gesamtspannungen sich auch hier wieder aus einem rotationssymmetrischen und einem sinus- bezw. cosinusförmigen Spannungszustand additiv zusammensetzen werden.

Bezüglich des letzteren zeigt der Vergleich des ihm entsprechenden Störungsgliedes $a^2 \gamma \cos \alpha$ mit dem des bereits unter **2** bis **4** untersuchten Spannungszustandes $a^2 \gamma$, daß die gesuchten Spannungen durch genau die gleichen Formeln wie oben sich bestimmen, wofern nur in denselben überall $\gamma \cos \alpha$ statt γ gesetzt wird; eine besondere Betrachtung erübrigt sich daher. Für die rotationssymmetrisch verteilten Spannungen hingegen lauten jetzt die Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen:

$$T_1' = 0 \text{ somit: } T_1 = c, \qquad N_1' - T_2 + a\gamma (h_0 - h_1 \xi) = 0, \qquad G_1' - N_1 a = 0 \quad \text{(IIIh)}$$

$$a \varepsilon_1 = u', \qquad a \varepsilon_2 = w, \qquad a^2 \varkappa_1 = w'', \qquad \varkappa_2 = 0 \quad \text{(Ih)}.$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{12 D}{\delta^2} (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2) = c & G_1 &= - D \varkappa_1 + T_1 a \varepsilon = - D \varkappa_1 + c a \varepsilon \\ T_2 &= \frac{12 D}{\delta^2} (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1) & G_2 &= - D \sigma \varkappa_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(Ih)}.$$

Eliminiert man wieder zunächst N_1 aus (IIIh), so folgt

$$G_1'' - a T_2 + a^2 \gamma (h_0 - h_1 \xi) = 0,$$

und mit $T_1 = c$, wenn in den aus (IIh) folgenden Beziehungen $\varepsilon_2'' = a \varkappa_1$; $\varkappa_2 = 0$ mittels (Ih) Dehnungen und Krümmungsänderungen durch die Spannungsresultanten ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2'' - T_1'' \sigma}{E \delta} = \frac{G_1^{(IV)}}{E \delta a} = a \varkappa_1 = \frac{a}{D} (- G_1 + c a \varepsilon),$$

mithin wie S. 347 [1]):

$$G_{1\alpha}^{(IV)} + \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2) G_{1\alpha} - c a (1 - \sigma^2) = 0$$

Es bleibt also außer $T_1 = c$ auch G_1 wie S. 347 berechnet, nämlich:

$$G_{1\alpha} = C_{1\alpha} \sin (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + C_{2\alpha} \sin (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) + C_{4\alpha} \cos (\mu \xi) \\ + C_{3\alpha} \cos (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + c a \varepsilon,$$

wo

$$\mu = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \qquad \nu^4 = \frac{12 a^2}{\delta^2} (1 - \sigma^2).$$

Hingegen ergibt sich jetzt für T_2:

$$T_{2\alpha} = \frac{G_1''}{a} + a\gamma (h_0 - h_1) \xi = \frac{\nu^2}{a} [- C_{4\alpha} \sin (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) - C_{3\alpha} \sin (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) \\ + C_{2\alpha} \cos (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + C_{1\alpha} \cos (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi)] + a\gamma (h_0 - h_1 \xi),$$

ferner für G_2 und N_1 wie S. 347:

$$G_{2\alpha} = \sigma G_1 - \sigma c a \varepsilon = \sigma [C_{1\alpha} \sin (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + C_{2\alpha} \sin (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) \\ + C_{3\alpha} \cos (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + C_{4\alpha} \cos (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi)]$$

$$N_{1\alpha} = \frac{\nu}{a \sqrt{2}} \left[+ \begin{matrix} (C_{2\alpha} - C_{3\alpha}) \sin (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + (C_{1\alpha} - C_{4\alpha}) \sin (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) \\ (C_{1\alpha} + C_{4\alpha}) \cos (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + (C_{2\alpha} + C_{3\alpha}) \cos (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) \end{matrix} \right],$$

während sich für die Verschiebungen ergibt:

$$w_\alpha = a \varepsilon_{2\alpha} = \frac{a}{E \delta} (T_{2\alpha} - \sigma T_{1\alpha}$$

$$u_\alpha = a \int \varepsilon_1 \, d\xi = \frac{a}{E \varrho} \int (T_{1\alpha} - T_{2\alpha} \sigma) \, d\xi = \frac{a}{E \delta} \int \{c_\alpha - \sigma [N_{1\alpha}' + a\gamma (h_0 - h_1 \xi)]\} \, d\xi$$

$$= - \frac{a \sigma}{E \delta} N_{1\alpha} + \frac{a}{E \delta} \left[(c_\alpha - \sigma a \gamma h_0) \xi) + \sigma h_1 \, a \gamma \frac{\xi^2}{2} \right] + c_\alpha' \; (c_\alpha' = \text{willk. Konst.})$$

und für die Tangentendrehung:

$$w_\alpha' = \frac{a}{E \delta} T_{2\alpha}' = \frac{\nu^3}{E \delta \sqrt{2}} [-(C_{2\alpha} + C_{3\alpha}) \sin (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) - (C_{1\alpha} + C_{4\alpha}) \sin (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) \\ + (C_{1\alpha} - C_{4\alpha}) \cos (\mu \xi) \mathfrak{Sin} (\mu \xi) + (C_{2\alpha} - C_{3\alpha}) \cos (\mu \xi) \mathfrak{Cof} (\mu \xi) - a \gamma h_1.$$

2. Spannungen infolge des Rohreigengewichts. In ebenso übersichtlicher Weise wie für das Flüssigkeitsgewicht lassen sich auch für das Rohreigengewicht die Spannungen im schräg liegenden Rohr auf die des horizontalen Rohrs zurückführen.

---

[1]) Der Index α kennzeichnet Spannungs- und Deformationsgrößen des unter α geneigten Rohres.

Für das letztere lauten nämlich, wie man leicht sieht, die Gleichgewichtsbedingungen bei Beanspruchung allein durch Rohreigengewicht:

$$
\begin{array}{ll}
T_1' - S_2^{\cdot} - a^2 \gamma_E' \sin\alpha = 0 & H_1' - G_2^{\cdot} + N_2\, a = 0 \\
S_1' + T_2^{\cdot} + N_2 - a^2 \gamma_E' \cos\alpha \sin\varphi = 0 & G_1' + H_2^{\cdot} - N_1\, a = 0 \\
N_1' + N_2^{\cdot} - T_2 + a^2 \gamma_E' \cos\alpha \cos\varphi = 0 & -H_2 + (S_1 + S_2)\, a = 0
\end{array}
$$

Vergleicht man diese mit den oben angegebenen Gleichungen für das horizontale Rohr, so erkennt man, daß dieselben sich, wenn man von dem Störungsglied $-a^2\gamma_E' \sin\alpha$ der X-Richtung zunächst absieht, nur um den konstanten Faktor $\cos\alpha$ in den beiden Störungsgliedern der Y- und Z-Richtung unterscheiden. Hieraus geht hervor, daß die Gesamtspannungen sich wieder aus einem sinus- bezw. cosinusförmigen Spannungszustand zusammensetzen, der sich einfach aus den früheren Werten dadurch ergibt, daß überall $\gamma_E' \cos\alpha$ statt γ_E' geschrieben wird, sowie einem rotationssymmetrischen Zustand für den die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$T_1' = a^2 \gamma_E' \sin\alpha; \qquad \text{mithin: } T_1 = a^2 \gamma_E' \xi \sin\alpha + c_\alpha^*$$

$$N_1' - T_2 = 0, \qquad G_1' - N_1\, a = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{III i}),$$

ferner:

$$a\varepsilon_1 = u' \qquad a\varepsilon_2 = w \qquad a^2 \varkappa_1 = w'' \qquad \varkappa_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (\text{II i})$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \dfrac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2) \\ T_2 = \dfrac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (\text{II i}) \qquad \left.\begin{array}{l} G_1 = -D\varkappa_1 + T_1\, a\varepsilon \\ G_2 = -D\sigma\varkappa_1 \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (\text{I i}).$$

Die Elimination von N_1 aus (III i) ergibt:

$$G_1'' - a\, T_2 = 0,$$

hierzu mit $T_1 = \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha + c_\alpha^*$ und $\varepsilon_2'' = a\varkappa_1$; $\varkappa_2 = 0$, mit Benutzung von (I i):

$$\varepsilon_2'' = \frac{T_2'' - T_1''\,\sigma}{E\,\delta} = \frac{G_1^{(IV)}}{E\,\delta_a} = a\varkappa_1 = \frac{a}{D}\left[-G_1 + a\varepsilon\,(c_\alpha^* + \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha)\right].$$

Hieraus:

$$G_1^{(IV)} + \frac{12\,a^2}{\delta^2}(1 - \sigma^2)\, G_1 - a\,(1 - \sigma^2)\,(c_\alpha^* + \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha) = 0.$$

Das Integral lautet:

$$G_{1\alpha} = C_{1\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{2\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{3\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{4\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)$$
$$+ a\varepsilon\,(c_\alpha^* \xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha).$$

Für die übrigen Spannungen und Formänderungen findet man:

$$T_{2\alpha} = \frac{G_1''}{a} = \frac{\nu^2}{a}\left[-C_{1\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) - C_{3\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) + C_{2\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi)\right.$$
$$\left. + C_{1\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\right].$$

$$G_{2\alpha} = \sigma\, G_{1\alpha} - \sigma a\varepsilon\, T_{1\alpha} = \left[C_{1\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{2\alpha}' \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\right.$$
$$\left. + C_{3\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + C_{4\alpha}' \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi)\right]$$

$$N_{1\alpha} = \frac{\nu}{a\sqrt{2}}\begin{bmatrix} (C_{2\alpha}' - C_{3\alpha}') \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{1\alpha}' - C_{4\alpha}') \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) \\ + (C_{1\alpha}' + C_{4\alpha}') \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{2\alpha}' + C_{3\alpha}') \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) \end{bmatrix} + a^2 \gamma_E' \sin\alpha\,.$$

$$w_\alpha = a\varepsilon_2 = \frac{a}{E\,\delta}(T_{2\alpha} - \sigma\, T_{1\alpha})$$

$$u_\alpha = a\int \varepsilon_1\, d\xi = \frac{a}{E\,\delta}\int (T_{1\alpha} - T_{2\alpha}\,\sigma)\, d\xi = \frac{a}{E\,\delta}\int \{\xi a^2 \gamma_E' \sin\alpha + c_\alpha^* - \sigma N_{1\alpha}'\}\, d\xi$$
$$= -\frac{a\,\delta}{E\,\delta} N_{1\alpha} + \frac{a}{E\,\delta}\left(c_\alpha^*\,\xi + \frac{\xi^2}{2} a^2 \gamma_E' \sin\alpha\right) + c_\alpha^{*\prime} \quad (c_\alpha^{*\prime} = \text{willk. Konst.})$$

$$w_\alpha' = \frac{a}{E\,\delta}(T_{2\alpha}' - T_{1\alpha}')$$
$$= \frac{\nu^3}{E\,\delta\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -(C_{2\alpha}' + C_{3\alpha}') \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) - (C_{1\alpha}' + C_{4\alpha}') \sin(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) \\ + (C_{1\alpha}' - C_{4\alpha}') \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Sin}(\mu\xi) + (C_{2\alpha}' + C_{3\alpha}') \cos(\mu\xi)\,\mathfrak{Cof}(\mu\xi) \end{bmatrix} - a^2 \gamma_E' \sin\alpha$$

Dieser Spannungszustand ist dem in II, 2, c gegebenen (mit $\gamma_E' \cos\alpha$ statt γ_E') zu überlagern, womit dann die Berechnung des schräg liegenden Rohres vollständig auf die des horizontalen zurückgeführt ist.

Zusammenfassung.

Die in der vorliegenden Arbeit gegebenen theoretischen Grundlagen ermöglichen es, die in schrägen oder horizontalen freitragenden Rohrleitungen beliebiger Stützung — insbesondere auch Walzenkesseln — auftretenden Spannungen genauer als bisher zu berechnen und insbesondere sich über die beträchtlichen Spannungen in der Nähe der Auflager ein der Wirklichkeit näher kommendes Bild zu machen.

Die für dünnwandige zylindrische biegungsfeste Schalen gültigen Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen werden zunächst für den Fall des horizontalen, durch Flüssigkeitsdruck beanspruchten Rohres aufgestellt und in geschlossener Form vollständig integriert, wobei in der Weise vorgegangen wird, daß der Einfluß der einzelnen Störungsglieder getrennt verfolgt wird.

Hierbei ergibt sich, daß die im Rohr auftretenden Gesamtspannungen sich aus der Ueberlagerung zweier Spannungszustände zusammensetzen, von denen der eine inbezug auf die Rohrachse symmetrisch, der andere sinus- bezw. cosinusförmig verteilte Spannungen hervorruft.

Die für jeden dieser Spannungszustände getrennt anzusetzenden Randbedingungen werden für alle praktisch wichtigen Stützungsarten, insbesondere auch für kontinuierliche Leitungsstränge angegeben.

Nachdem sodann auch der Einfluß des Rohreigengewichts für das horizontale Rohr vollständig ermittelt ist, wird das biegungsfeste, geneigt liegende Rohr gleichfalls auf Flüssigkeits- und Eigengewichtsbelastung untersucht und gezeigt, daß sich bei wiederum getrennter Verfolgung des Einflusses der einzelnen Störungsglieder die Spannungen in geneigt liegenden Rohren in sehr einfacher und übersichtlicher Weise auf die im horizontalen Rohr auftretenden zurückführen lassen. 80

Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen.

Von **GEORG PICK** in Prag.[1]

Die Gleichungen, welche entstehen, wenn man von den Diagonalelementen einer gegebenen quadratischen Matrix die Unbekannte t subtrahiert, und die erhaltene Determinante gleich Null setzt, haben lauter reelle Wurzeln in dem Falle, daß die gegebene Matrix symmetrisch ist. Es liegt deshalb nahe, für den allgemeinen Fall eine Abschätzung des Imaginärteils der Wurzel zu suchen, der diesen Teil in Abhängigkeit setzt von der Abweichung der Matrix von der Symmetrie. Von diesem Gedanken ausgehend hat Bendixson solche Gleichungen untersucht, und Hirsch hat die Untersuchung auf Matrizen mit komplexen Elementen ausgedehnt[2].

Wenn diese Frage nun hier zunächst unter Beschränkung auf reelle Matrizen wieder aufgenommen wird, so geschieht das, weil die von Bendixson erzielte Abschätzung des Imaginärteils erheblich verbessert, nämlich durch eine scharfe Abschätzung ersetzt werden kann. Sind $a_{\mu\nu}$ die Elemente der gegebenen n-zeiligen Matrix, und bezeichnet man den größten unter den Werten

$$\left|\frac{a_{\mu\nu}-a_{\nu\mu}}{2}\right|$$

mit g, so findet Bendixson für den Imaginärteil der Wurzel $t=r+si$ die Beziehung

$$-g\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \leq s \leq +g\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

[1]) Die gewöhnlichen Schwingungsprobleme der Mechanik führen auf ein System von linearen Gleichungen, die eine etwas allgemeinere Form haben, als die vom Verfasser hier vorausgesetzten. Da man nämlich stets Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat, tritt der Exponent λ nicht linear, sondern quadratisch in dem Koeffizientenschema (Matrix) der linearen Gleichungen auf. Eine unmittelbare Anwendung der Ergebnisse der nachstehenden Arbeit auf die Entscheidung der Stabilitätsfrage bei derartigen Schwingungsproblemen wird daher kaum möglich sein. Wohl aber kommen hier andere als mechanische Schwingungsvorgänge in Frage, vor allem Temperaturschwankungen und elektrische Schwingungen, bei denen der Einfluß der Selbstinduktion vernachlässigt wird. (Anmerkung des Herausgebers.)

[2]) Bendixson, Acta mathematica XXV, S. 359—365, Hirsch, ebenda S. 367—370.

Es ist aber, wie sich im folgenden zeigen wird,

$$-g \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2\,n} \leqq s \leqq + g \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2\,n},$$

und diese Schranken stimmen mit den obigen zwar für $n = 2$ und $n = 3$ überein, sind aber von $n = 4$ an numerisch kleiner. Sie stellen andererseits das Beste dar, was zu erreichen ist, weil sich eine Matrix von der vorausgesetzten Beschaffenheit angeben läßt, bei der die Gleichheitszeichen der Formel zutreffen [1]).

Den Abschätzungen der Wurzeln charakteristischer Determinantengleichungen entsprechen solche der reziproken singulären Werte Fredholmscher Integralgleichungen. Auf diese soll hier zum Schlusse kurz hingewiesen werden, ohne auf den Beweis der bezüglichen Formeln näher einzugehen.

I. Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen.

Es sei $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$. Die algebraische Gleichung in t

$$\begin{vmatrix} b_{11} - t, & b_{12}, & .\,. & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22} - t, & .\,. & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1}, & b_{n2}, & .\,. & b_{nn} - t \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hat dann lauter reelle Wunzeln. Ist r irgend eine von ihnen, so genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} b_{11}\,x_1 + b_{12}\,x_2 + .\,. + b_{1n}\,x_n = r\,x_1 \\ b_{21}\,x_1 + b_{22}\,x_2 + .\,. + b_{2n}\,x_n = r\,x_2 \\ \vdots \\ b_{n1}\,x_1 + b_{n2}\,x_2 + .\,. + b_{nn}\,x_n = r\,x_n \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

n nicht sämtlich verschwindende Zahlen $x_1, x_2, .\,. \, x_n$, die reell angenommen werden können, wovon wir aber keinen Gebrauch machen wollen. Multipliziert man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit den konjugierten Werten der x, also $\bar{x}_1, \bar{x}_2, .\,. \, \bar{x}_n$ und addiert, so ergibt sich

$$r \sum_\mu x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} \bar{x}_\mu \, x_\nu \text{ [2])} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin, wie im folgenden die Summationen über alle Werte der Zeiger von 1 bis n auszudehnen sind. Es ist zulässig und für das Folgende bequem, die Größen x so zu normieren, daß

$$\sum_\mu x_\mu \bar{x}_\mu = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ist. Dann wird also

$$r = \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} \bar{x}_\mu \, x_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Ersetzt man hier auf der rechten Seite alle x durch ihre Absolutwerte, die mit den entsprechenden y bezeichnet werden sollen, die $b_{\mu\nu}$ aber einmal durch $\pm f$, das anderemal durch $-f$, wo f den größten der Beträge $|b_{\mu\nu}|$ bedeutet, so ergibt sich

$$-f \sum_{\mu,\nu} y_\mu \, y_\nu \leqq r \leqq f \sum_{\mu,\nu} y_\mu \, y_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Hier steht rechts und links, abgesehen von den Faktoren $\pm f$, ein Wert jener quadratischen Form, deren sämtliche Koeffizienten gleich Eins sind. Ein solcher Wert, erzeugt durch normierte y, ist höchstens gleich der größten Wurzel der zugehörigen charakteristischen (also hier Säkular-) Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda, & 1, & .\,.\,. & 1 \\ 1, & 1 - \lambda, & .\,.\,. & 1 \\ . & . & . & . \\ 1, & 1, & .\,.\,. & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

d. h. von

$$\lambda^n - n\,\lambda^{n-1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

---

[1]) Vollständigkeit halber werden im folgenden auch die reellen Teile der Wurzeln behandelt, was für das mechanische Problem von Wichtigkeit ist; die sie betreffenden Resultate finden sich bei Bendixson a. a. O. schon vor.

[2]) Solche Zusammenfassungen sind auch bei Bendixson der Ausgangspunkt, sie werden aber oben in anderer Weise verwertet als bei ihm.

Dieser größte Wurzelwert ist augenscheinlich n, und es ergibt sich also

$$-nf \leq r \leq nf \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Man sieht auch, daß diese Schranken erreicht werden, wenn von vornherein alle $b_{\mu\nu}$ entweder gleich $+f$ oder gleich $-f$ gesetzt werden.

Es sei $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, also $c_{\mu\mu} = 0$. Die algebraische Gleichung in t

$$\begin{vmatrix} c_{11} - t, & c_{12}, & \ldots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22} - t, & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots & c_{nn} - t \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

hat dann lauter rein imaginäre Wurzeln. Ist is irgend eine von ihnen, so genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1n} x_n &= i s x_1 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \ldots + c_{2n} x_n &= i s x_2 \\ &\vdots \\ c_{n1} x_1 + c_{n2} x_2 + \ldots + c_{nn} x_n &= i s x_n \end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

n nicht sämtlich verschwindende Zahlen x, die wir wieder normiert annehmen dürfen. Durch Zusammenfassung, wie oben, erhält man

$$is = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu = \sum_{\mu<\nu} c_{\mu\nu} (\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu) \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

wo die letzte Summation nur über die Wertepaare μ, ν zu erstrecken ist, die der beigesetzten Bedingung genügen.

Mit dieser Relation verfahren wir nun so: Zuerst wollen wir bewirken, daß die Arkus der vorkommenden Werte der Unbestimmten innerhalb eines Winkelraums von der Größe π, also etwa zwischen $-\frac{\pi}{2}$ exkl. und $+\frac{\pi}{2}$ inkl., liegen. Das gelingt, indem wir nötigenfalls die Vorzeichen einiger (oder aller) x umkehren. Sie bleiben dabei normiert. Damit die rechte Seite von (11) dabei ungeändert bleibt, wird man nun auch bei den $c_{\mu\nu}$ entsprechend Zeichenumkehrungen vornehmen müssen, was also geschehen soll. Wir wollen zweitens eine Umnumerierung der Unbestimmten so vornehmen, daß sie nach zunehmenden Werten jener Arkus gereiht sind; entsprechende Indexvertauschungen sind an den Koeffizienten vorzunehmen. Statt (11) ergibt sich so

$$is = \sum_{\mu<\nu} c_{\mu\nu}^* (\bar{y}_\mu y_\nu - y_\mu \bar{y}_\nu) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}^* \bar{y}_\mu y_\nu \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und es gilt jetzt Folgendes: a) die $c_{\mu\nu}^*$ stimmen, abgesehen von Vorzeichen und Reihenfolge, mit den $c_{\mu\nu}$ überein; b) die Größen $\frac{\bar{y}_\mu y_\nu - y_\mu \bar{y}_\nu}{i}$ sind positiv. Denn sie sind die Imaginärteile von Zahlen, deren Arkus zwischen Null und π liegen.

Es sei nun g der größte unter den Beträgen $|c_{\mu\nu}|$, also auch unter den $|c_{\mu\nu}^*|$. Ersetzt man auf der rechten Seite von (12) alle $c_{\mu\nu}^*$ mit $\mu < \nu$ einmal durch $+g$, das anderemal durch $-g$, so erhält man eine obere und eine untere Schranke für s. Man kann das Resultat so aussprechen: $\frac{s}{g}$ liegt zwischen dem größten und kleinsten Werte unter den durch i dividierten Wurzeln der charakteristischen Gleichung jener schiefsymmetrischen Matrix, in der auf der einen Seite der Hauptdiagonale überall $+1$, auf der andern überall -1 steht. Denn $\sum_{\mu<\nu} (\bar{y}_\mu y_\nu - y_\mu \bar{y}_\nu)$ und der entgegengesetzte Ausdruck sind Werte der zugehörigen Bilinearform dieser Matrix, und das Behauptete ergibt sich aus einem bekannten Satz über Hermitesche Formen; in eine solche geht diese Bilinearform durch Division mit i über. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\begin{vmatrix} -t & & & (1) \\ & -t & & \\ & & \ddots & \\ (-1) & & & -t \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

in verständlicher Bezeichnungsweise. Die Determinante ist leicht nach einer von **Hölder** angegebenen Regel auszurechnen[1]. Man erhält so statt (13)

$$(t+1)^n + (t-1)^n = 0 \qquad \qquad (14),$$

woraus sich die Lösnngen

$$t = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \text{ mit } \alpha^n = -1 \qquad \qquad (15)$$

ergeben, oder anders

$$t = i \operatorname{cotg} \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad \qquad (16).$$

Der algebraisch größte unter den durch (16) bestimmten Werten von $\frac{t}{i}$ ist $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$, der kleinste $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

Man hat also jetzt

$$-g \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \leq s \leq g \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \qquad \qquad (17)$$

und es ist klar, daß diese Weite wirklich erreicht werden, wenn die $c_{\mu\nu}$ für $\mu < \nu$ von vornherein alle gleich g sind.

II. Allgemeine reelle Matrizen. Die Fredholmsche Gleichung.

Es seien $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$ beliebige n^2 reelle Zahlen. Wir setzen

$$\frac{a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}}{2} = b_{\mu\nu}, \quad \frac{a_{\mu\nu} - a_{\nu\mu}}{2} = c_{\mu\nu} \text{ also } a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} \qquad (18),$$

und es sei f der größte unter den Beträgen $|b_{\mu\nu}|$, g der größte unter den Beträgen $|c_{\mu\nu}|$. Die $b_{\mu\nu}$ sind die Elemente einer symmetrischen, die $c_{\mu\nu}$ sind die Elemente einer schiefsymmetrischen Matrix.

$t = r + s\,i$ sei eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - t, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2}, & a_{n1}, & \ldots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = 0 \qquad \qquad (29).$$

Dann gibt es n nicht sämtlich verschwindende Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= t x_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= t x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= t x_n \end{aligned}\right\} \qquad \qquad (20)$$

befriedigen. Durch Zusammenfassung wie im vorigen Abschnitt erhält man

$$t = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu \qquad \qquad (21),$$

wenn die x wieder normiert angenommen werden. Indem man nun Reelles und Imaginäres trennt, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} r &= \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu \\ i s &= \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu \end{aligned}\right\} \qquad \qquad (22)$$

und es gilt also der Satz:

Der reelle Teil jedes charakteristischen Werts der $a_{\mu\nu}$-Matrix liegt zwischen dem größten und kleinsten charakteristischen Wert der $\frac{a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}}{2}$-Matrix; der imaginäre Teil dagegen (abgesehen vom Faktor i) zwischen dem größten und kleinsten charakteristischen Wert der $\frac{a_{\mu\nu} - a_{\nu\mu}}{2}$-Matrix.

[1]) Leipziger Berichte 65, S. 110–120 und 66, S. 98–102. In dem ersten dieser Aufsätze findet sich auch die Auflösung der Gleichung (13). Vgl. ferner **Hirsch**, Math. Ann. 52, S. 150 ff.

Denn die rechten Seiten in (22) sind durch normierte x erzeugte Werte der zu den beiden Hilfsmatrizen gehörigen Formen.

Aus den Ergebnissen (8) und (17) des vorigen Abschnitts fließen nun die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} &-nf \leqq \Re(t) \leqq +nf && \left(f = \operatorname{Max}\left|\frac{a_{\mu\nu}+a_{\nu\mu}}{2}\right|\right) \\ &-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2a}\,g \leqq \Im(t) \leqq +\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\,g && \left(g = \operatorname{Max}\left|\frac{a_{\mu\nu}+a_{\nu\mu}}{2}\right|\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (23),$$

und man erkennt auch, daß die Gleichheitszeichen realisiert werden können, und zwar gerade durch die im vorigen Abschnitt festgestellten besonderen symmetrischen bezw. schiefsymmetrischen Matrizen. Es ist leicht, den in der zweiten Formel von (23) auftretenden Koeffizienten $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$ mit dem bei Bendixson auftretenden $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$ direkt zu vergleichen, und zwar vermittelst der unschwer zu beweisenden Relation

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n} + \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{(2n-1)\pi}{2n} = n(n-1) \quad . \; . \; . \; . \quad (24).$$

Hier sind links je zwei von den Enden gleich weit abliegende Posten einander gleich, und der bei ungeradem n auftretende mittlere Posten ist gleich Null. Man sieht also direkt die Richtigkeit der Beziehung

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n} \leqq \frac{n(n-1)}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25),$$

und daß das Gleichheitszeichen nur in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ gilt, abgesehen von dem belanglosen Fall $n = 1$.

Zu den gewonnenen Abschätzungen (23) sei noch folgendes bemerkt. Es wäre eigentlich sachgemäß, in den Voraussetzungen die Diagonalelemente, die eine Rolle für sich spielen, von den übrigen Elementen zu trennen. Man kann nun auch diese Verallgemeinerung ohne weiteres an den obigen Resultaten anbringen, man braucht zu diesem Zwecke nur t um eine gegebene reelle Zahl zu vermindern. Die erste Formel in (23) erleidet eine leichte Modifikation, die explizit anzugeben hier wohl überflüssig ist.

Schließlich noch eine Bemerkung über die lineare Integralgleichung

$$x(u) + \lambda\int_0^1 K(u, v)\,x(v)\,dv = y(u) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

mit beliebigem (stetigem) reellen Kern. Die singulären Werte von λ, also diejenigen, für welche

$$x(u) + \lambda\int_0^1 K(u, v)\,x(v)\,dv = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung $x(u)$ hat, entsprechen den negativen reziproken Werten der Wurzeln einer charakteristischen Gleichung, den Elementen der zugehörigen Matrix die Werte des Kerns $K(u, v)$. Wenn nun die Abschätzungen (23) beim Grenzübergang standhalten, so ergeben sich folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &-\operatorname{Max}\left|\frac{K(u,v)+K(v,u)}{2}\right| \leqq \Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqq \operatorname{Max}\left|\frac{K(u,v)+K(v,u)}{2}\right| \\ &-\frac{2}{\pi}\operatorname{Max}\left|\frac{K(u,v)-K(v,u)}{2}\right| \leqq \Im\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqq \frac{2}{\pi}\operatorname{Max}\left|\frac{K(u,v)-K(v,u)}{2}\right| \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (28).$$

Während aber in der ersten dieser Relationen die Gleichheitszeichen durch konstante $K(u, v)$ bewirkt werden können, gelingt das in der zweiten Relation nicht durch stetige Kerne, wohl aber durch schiefsymmetrische $K(u, v)$, bei denen $K(u, v)$ für $u < x$ einen konstanten, für $u > v$ also den entgegengesetzten konstanten Wert hat.

Auf den Beweis von (28), der übrigens für die erste Relation auf der Hand liegt, soll nicht näher eingegangen werden.

Prag, Januar 1922.

Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler.

Von **L. v. BORTKIEWICZ** in Berlin.

Gauß hat sein Fehlergesetz, wonach eine Wahrscheinlichkeit $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} d u$ dafür besteht, daß die zufällige Abweichung eines empirischen Wertes irgend einer Größe von ihrem wahren Wert, oder anders: der zufällige Fehler einer Größe, zwischen den Grenzen u und $u + d u$ eingeschlossen sei, im Jahre 1809 aufgestellt und dieses Fehlergesetz zum Angelpunkt der mathematischen Theorie der Beobachtungsfehler gemacht[1]). Die Frage, wie groß auf Grundlage des Gaußschen Gesetzes die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß die Quadratsumme einer beliebigen Anzahl zufälliger Fehler in ein bestimmtes differentielles Intervall falle, wurde — ungeachtet der Tatsache, daß diese Quadratsumme eine grundlegende Bedeutung für die mathematische Theorie der Beobachtungsfehler hat — erst sechsundsechzig Jahre später, und zwar von Helmert, aufgeworfen und gelöst[2]).

Helmert hat dabei angenommen, daß sämtlichen in Frage kommenden Fehlern Beobachtungen von gleicher Genauigkeit entsprechen, und er hat den Beweis in der Weise geführt, daß er zuerst die Fälle von 2, 3 und 4 Fehlern betrachtet, sodann die für diese drei Fälle gewonnenen Ergebnisse in einer Formel von bestimmter Gestalt zusammengefaßt und schließlich, um die Allgemeingültigkeit dieser Formel zu erweisen, gezeigt hat, daß, wenn sie für die Fehlerzahl n gelte, sie auch für die Fehlerzahl $n + 2$ gelten müsse. Dieser etwas mühsame Weg und jene einschränkende Annahme sollen im folgenden bei Ableitung des (verallgemeinerten) Helmertschen Verteilungsgesetzes vermieden werden[3]).

1. Die Wahrscheinlichkeit, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ in ein bestimmtes differentielles Intervall fällt. Man fasse von vornherein n zufällige Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ins Auge und bezeichne mit h_i die Präzision, die einem Fehler ε_i entspricht. Die Wahrscheinlichkeit, daß ε_i zwischen u_i und $u_i + d u_i$ enthalten ist, wird dann durch $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 u_i^2} d u_i$ ausgedrückt. An Stelle der Summe $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ tritt hier nach der Fehlertheorie die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2 \qquad (1).$$

Die Wahrscheinlichkeit für diese Summe, zwischen den Grenzen s und $s + d s$ enthalten zu sein, sei mit $f_n(s)\, d s$ bezeichnet. Des symmetrischen Charakters des Gaußschen Fehlergesetzes wegen stellt sich die Wahrscheinlichkeit, daß $|\varepsilon_i|$, d. h. der absolute Betrag eines Fehlers ε_i, zwischen u_i und $u_i + d u_i$ liege, als $\frac{2 h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 u_i^2} d u_i$ dar. Das ist zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $|h_i \varepsilon_i|$ in den Grenzen $h_i u_i$ und $h_i u_i + h_i d u_i$ eingeschlossen bleibt. Setzt man $h_i u_i = t_i$, so erhält man als Ausdruck derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_i^2} d t_i$, und führt man die Bezeichnung

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 = r_m^2 \qquad (2)$$

[1]) C. F. Gauß, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, in deutscher Sprache herausgegeben von A. Börsch und P. Simon, Berlin 1887, S. 92—102.

[2]) F. R. Helmert, Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhang stehende Fragen, Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 21, 1876, S. 192—218. Seine Endformel hatte Helmert bereits ebenda, Bd. 20, 1875, S. 303, mitgeteilt und hierbei die alsbaldige Veröffentlichung der Ableitung dieser Formel in Aussicht gestellt.

[3]) Zur Ableitung des Helmertschen Verteilungsgesetzes vergl. E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 147—150, und P. Pizzetti, I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali (Atti della Regia Università di Genova. Quarto centenario Columbiano, Genova 1892, S. 113 bis 333), S. 256—258.

ein, so läßt sich durch

$$\int_0^s f_n(r_n^2)\, d\, r_n^2$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrücken, daß die Summe (1) zwischen 0 und s zu liegen kommt. Man hat nun offenbar:

$$\int_0^s f_n(r_n^2)\, d\, r_n^2 = \int\int\ldots\int \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_1^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_2^2} \ldots \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2} d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n,$$

wobei die Integrationsgrenzen rechter Hand sich aus den Ungleichungen $0 < r_n^2 < s$ und aus der Bedingung ergeben, daß $t_1, t_2, \ldots t_n$ stets positiv bleiben. Alsdann findet man:

$$\int_0^s f_n(r_n^2)\, d\, r_n^2 = 2^n \pi^{-\frac{n}{2}} \int\int\ldots\int e^{-r_n^2} d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n$$

und, unter Anwendung der neu einzuführenden Bezeichnung

$$\int\int\ldots\int d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n = V_n(s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

durch Differentiation nach s:

$$f_n(s) = 2^n \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-s} \frac{d\, V_n(s)}{d\, s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die Größe $V_n(s)$ läßt sich wie folgt bestimmen. Mit Rücksicht auf (2) hat man:

$$V_n(r_n^2) = \int_0^{r_n}\int_0^{r_{n-1}}\ldots\int_0^{r_1} d\, t_1\, d\, t_2 \ldots d\, t_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3'),$$

und setzt man:

$$\frac{\sqrt{r_m^2 - t_m^2}}{r_m} = \frac{r_{m-1}}{r_m} = v_m,$$

so erhält man:

$$t_m = r_m \sqrt{1 - v_m^2}, \qquad d\, t_m = -\frac{r_m v_m}{\sqrt{1 - v_m^2}} d\, v_m.$$

Demnach geht (3') in

$$V_n(r_n^2) = \int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 \frac{r_1 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2}} \frac{r_2 v_2}{\sqrt{1 - v_2^2}} \ldots \frac{r_n v_n}{\sqrt{1 - v_n^2}} d\, v_1\, d\, v_2 \ldots d\, v_n$$

über. Man setze alsdann:

$$\int_0^1 \frac{v_m^m}{\sqrt{1 - v_m^2}} d\, v_m = c_m \quad \text{und} \quad c_1 c_2 \ldots c_m = g_m \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Durch sukzessive Integrationen findet sich:

$$\int_0^1 \frac{r_1 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2}} d\, v_1 = g_1 r_1 = g_1 r_2 v_2, \qquad \int_0^1 \frac{g_1 r_2^2 v_2^2}{\sqrt{1 - v_2^2}} d\, v_2 = g_2 r_2^2 = g_2 r_3^2 v_3^2 \ldots$$

$$V_n(r_n^2) = \int_0^1 \frac{g_{n-1} r_n^n v_n^n}{\sqrt{1 - v_n^2}} d\, v_n = g_n r_n^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3'').$$

Es läßt sich ferner aus (5) durch partielle Integration eine Rekursionsformel herleiten, mit deren Hilfe g_n leicht ermittelt werden kann. Man hat nämlich:

$$c_m = \int_0^1 \frac{v_m^{m-1} v_m\, d\, v_m}{\sqrt{1 - v_m^2}} = \Big\{ - v_m^{m-1} \sqrt{1 - v_m^2} \Big\}_0^1 + (m-1) \int_0^1 v_m^{m-2} \sqrt{1 - v_m^2}\, d\, v_m$$

$$= (m-1)(c_{m-2} - c_m),$$

woraus

$$c_m = \frac{m-1}{m} c_{m-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

folgt. Zugleich ist:

$$c_0 = \int_0^1 \frac{d\,v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad c_1 = \int_0^1 \frac{v_1\,d\,v_1}{\sqrt{1 - v_1^2}} = 1.$$

Es ergibt sich daher laut Formel (6) $c_2 = \frac{\pi}{4}$ und weiterhin auf Grund der Formeln (5) und (6):

$$\frac{g_{m+2}}{g_m} = c_1\,c_2\,\frac{c_3}{c_1}\,\frac{c_4}{c_2}\cdots\frac{c_{m+1}}{c_{m-1}}\,\frac{c_{m+2}}{c_m} = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{m}{m+1}\,\frac{m+1}{m+2},$$

$$\frac{g_{m+2}}{g_m} = \frac{\pi}{2\,(m+2)} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Somit erhält man schließlich, da $g_1 = 1$ und $g_2 = \frac{\pi}{4}$, bei n ungerade:

$$g_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n} \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

und bei n gerade:

$$g_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n} \quad . \quad . \quad . \quad (8'').$$

Damit ist der letzte vorbereitende Schritt zur Bestimmung von $f_n(s)$ getan. Greift man nunmehr auf die Formeln (4) und (3″) zurück, so findet man:

$$V_n(s) = g_n\,s^{\frac{n}{2}}, \qquad \frac{d\,V_n(s)}{d\,s} = \frac{n}{2}\,g_n\,s^{\frac{n-2}{2}}, \qquad f_n(s) = 2^{n-1}\,n\,\pi^{-\frac{n}{2}}\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}\,g_n,$$

mithin bei n ungerade wegen (8′):

$$f_n(s) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)\sqrt{\pi}} = \frac{2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{(n-1)!\,\sqrt{\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

und bei n gerade wegen (8″):

$$f_n(s) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\,s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-2)} = \frac{s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} \quad . \quad . \quad . \quad (9'').$$

Um für $f_n(s)$ einen einheitlichen Ausdruck zu erhalten, der nicht mehr davon abhängt, ob n ungerade oder gerade ist, muß man das Eulersche Integral zweiter Gattung (Gammafunktion)

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-x}\,d\,x \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

heranziehen.

Für ganzzahlige p ist bekanntlich $\Gamma(p) = (p-1)!$, für p-Werte, die in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegen, $\Gamma(p) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \ldots (p-1)$. Daher kann für (8′) und (8″) bezw. für (9′) und (9″) einheitlich geschrieben werden:

$$g_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \quad . \quad . \quad (8), \qquad f_n(s) = \frac{s^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-s}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad . \quad . \quad (9).$$

Der von Helmert betrachtete Fall ist dadurch charakterisiert, daß $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = h$. Bezeichnet man mit $\psi_n(u)\,du$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ zwischen u und $u + du$ zu liegen kommt, so erhält man $h^2 u = s$, $h^2 du = ds$, $\psi_n(u)du = f_n(s)\,ds$ und folglich $\psi_n(u) = h^2 f_n(s)$. Daher ergibt sich auf der Grundlage von (9):

$$\psi_n(u)\,du = \frac{h^n\,u^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-h^2 u}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,du\,^{1)}$$

[1] So schreibt die Helmertsche Formel Czuber (a. a. O., S. 149, Formel 5), während bei Helmert selbst (a. a. O., S. 203, Formel 25) an Stelle von u und du die Produkte $n\,\sigma_2$ und $n\,\delta_2$ auftreten, wobei $\delta_2 = d\,\sigma_2$.

2. Die Wahrscheinlichkeit, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ einen bestimmten Wert nicht überschreitet. Man fasse nunmehr die (von Helmert nicht betrachtete) Wahrscheinlichkeit ins Auge, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ den Wert z nicht überschreitet. Bezeichnet man sie mit $F_n(z)$, so hat man der Formel (9) zufolge:

$$F_n(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^z s^{\frac{n-2}{2}} e^{-s} ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Bei $n = 1$ wird vermittelst der Substitution $s = t^2$

$$F_1(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2} dt$$

Bei $n > 1$ liegt der Fall weniger einfach. Das in (11) auftretende Integral erscheint als sogenannte unvollständige Gammafunktion und soll im folgenden einer eingebürgerten Bezeichnungsweise gemäß durch $\Gamma\left(\frac{n}{2}, z\right)$ dargestellt werden. Demnach ist

$$F_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, z\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11').$$

Man setze $\frac{n}{2} = k$ und $k = \tau + \delta$, wo τ eine ganze Zahl ist, die der Bedingung $0 < \delta \leqq 1$ genügt. Durch wiederholte partielle Integration findet man:

$$\Gamma(k, z) = -e^{-z}\{z^{k-1} + (k-1) z^{k-2} + (k-1)(k-2) z^{k-3} + \ldots (k-1)(k-2)\ldots(\delta+1) z^{\delta}\}$$
$$+ (k-1)(k-2)\ldots(\delta+1)\,\delta \int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds.$$

Diese **Formel** kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\Gamma(k,z) = \delta(\delta+1)\ldots(k-1)\left[\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds - e^{-z}\left\{\frac{z^{\delta}}{\delta} + \frac{z^{\delta+1}}{\delta(\delta+1)} + \ldots + \frac{z^{k-1}}{\delta(\delta+1)\ldots(k-1)}\right\}\right] \quad (12).$$

Man erhält zugleich, indem man hierin $z = \infty$ setzt, die bekannte Beziehung:

$$\Gamma(k) = \delta(\delta+1)\ \ldots\ (k-1)\int_0^{\infty} s^{\delta-1} e^{-s} ds.$$

Daher findet man wegen (11'):

$$F_n(z) = \frac{\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds - e^{-z}\left\{\frac{z^{\delta}}{\delta} + \frac{z^{\delta+1}}{\delta(\delta+1)} + \ldots + \frac{z^{k-1}}{\delta(\delta+1)\ldots(k-1)}\right\}}{\int_0^{\infty} s^{\delta-1} e^{-s} ds} \quad \ldots \quad (11'').$$

Ist n **ungerade**, so hat man $\tau = \frac{n-1}{2}$, $\delta = 1/2$ zu setzen, und man erhält vermöge der Substitution $s = t^2$:

$$\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds = 2\int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2} dt, \qquad \int_0^{\infty} s^{\delta-1} e^{-s} ds = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

und folglich:

$$F_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2} dt - \frac{e^{-z}}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2z^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{2^2 z^{\frac{3}{2}}}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{2^{\frac{n-1}{2}} z^{\frac{n-2}{2}}}{1\cdot 3\ldots(n-2)}\right\}$$

oder auch

$$F_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-t^2} dt - e^{-z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\sqrt{2z}}{1} + \frac{(\sqrt{2z})^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{(\sqrt{2z})^{n-2}}{1 \cdot 3 \ldots (n-2)} \right\} \qquad (12').$$

Ist aber n **gerade**, so hat man $\tau = \frac{n-2}{2}$, $\delta = 1$ zu setzen, und man erhält dementsprechend:

$$\int_0^z s^{\delta-1} e^{-s} ds = 1 - e^{-z}, \qquad \int_0^\infty s^{\delta-1} e^{-s} ds = 1$$

und folglich:

$$F_n(z) = 1 - e^{-z} \left\{ 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{n}{2}-1\right)} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12'').$$

Die Formeln (12′) und (12″) lassen sich mittels der Substitutionen $t\sqrt{2} = y$ und $\sqrt{2z} = \chi$ auch wie folgt darstellen:

$$F_n\left(\frac{\chi^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\chi e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{\chi^{n-2}}{1 \cdot 3 \ldots (n-2)} \right\} \quad (13'),$$

$$F_n\left(\frac{\chi^2}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \left\{ 1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{\chi^{n-2}}{2 \cdot 4 \ldots (n-2)} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13'').$$

Pearson gibt in seiner Tafel XII[1] die numerischen Werte von

$$P_{n'}(\chi^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_\chi^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{\chi^{n'-3}}{1 \cdot 3 \ldots (n'-3)} \right\} \quad (14')$$

bei n' gerade und von

$$P_{n'}(\chi^2) = e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \left\{ 1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{\chi^{n'-3}}{2 \cdot 4 \ldots (n'-3)} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14''),$$

bei n' ungerade für $n' = 3, 4, 5$ usw. bis 30 und $\chi^2 = 1, 2, 3$ usw. bis 30, sowie $\chi^2 = 40$, 50, 60 und 70 an.

Da, wie bekannt,

$$\int_\chi^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\chi e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

so kann (14′) auch wie folgt geschrieben werden:

$$P_{n'}(\chi^2) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\chi e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^3}{1 \cdot 3} + \ldots + \frac{\chi^{n'-3}}{1 \cdot 3 \ldots (n'-3)} \right\} \quad (15),$$

und man erhält demnach sowohl für n ungerade wie für n gerade die Beziehung:

$$F_n(z) = 1 - P_{n'}(\chi^2)$$

bei $n' = n + 1$, $\chi^2 = 2z$, oder anders geschrieben:

$$F_n(z) = 1 - P_{n+1}(2z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Es sei z. B. $n = 20$, und es werde nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß $\sum_{i=1}^{20} h_i^2 \varepsilon_i^2$ den Wert 13 nicht überschreite. Aus $\sqrt{2 \cdot 13} = \chi$ ergibt sich: $\chi^2 = 26$, und man findet in der Pearsonschen Tafel XII für $n' = 21$ und $\chi^2 = 26$: $P = 0{,}165812$. Der gesuchte Wert, d. h. $F_{20}(13)$, ist also 0,834188.

Sofern man keine übermäßige Genauigkeit anstrebt und sich vielmehr auf etwa vier Dezimalstellen im Resultat beschränkt, kann $F_n(z)$ auf viel kürzerem Wege ermittelt

[1] K. Pearson, Tables for statisticians and biometricians. Cambridge 1914, S. XXXI und 26 bis 28.

werden[1]. Man braucht nämlich nur, bei einem gegebenen n die Werte $f_n(s)$ für $s = 1, 2, 3$ usw. zu berechnen, um alsdann an Hand der Näherungsformel

$$F_n'(z) = f_n(1) + f_n(2) + \ldots + f_n(z-1) + \frac{1}{2} f_n(z) + \frac{1}{24}\{f_n(z-1) - f_n(z+1)\} \qquad (17)$$

zu den gesuchten Werten von $F_n(z)$ zu gelangen. Formel (17) leitet sich daraus her, daß näherungsweise

$$F_n(z) = \int_0^z f_n(s)\, ds = \frac{1}{2} f_n(0) + f_n(1) + f_n(2) + \ldots f_n(z-1) + \frac{1}{2} f_n(z) - \frac{1}{12}\{f_n'(z) - f_n'(0)\}$$

sowie

$$f_n'(z) = \frac{\{f_n(z) - f_n(z-1)\} + \{f_n(z+1) - f_n(z)\}}{2},$$

wobei noch $f_n(0) = f_n'(0) = 0$. Für $n = 20$ erhält man:

z	$F_n(z)$ genau	$F_n(z)$ näherungsweise	z	$F_n(z)$ genau	$F_n(z)$ näherungsweise	z	$F(z)$ genau	$F_n(z)$ näherungsweise
1	0,0000	0,0000	7	0,1695	0,1696	13	0,8342	0,8342
2	0,0000	0.0000	8	0,2834	0,2834	14	0,8906	0,8906
3	0.0011	0,0010	9	0,4126	0,4125	15	0,9301	0,9302
4	0,0081	0,0081	10	0 5421	0,5420	...	....	....
5	0,0318	0,0319	11	0,6595	0,6594	...	....	......
6	0,0839	0,0841	12	0,7576	0,7576	20	0,9950	0,9950

3. Die mathematische Erwartung, der mittlere Fehler und der wahrscheinlichste Wert von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$. Bisher sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, sei es in ein bestimmtes differentielles Intervall falle, sei es eine bestimmte Grenze nicht überschreite, betrachtet worden. Es bietet sowohl ein theoretisches wie ein praktisches Interesse, diese Betrachtungen in der Richtung auf die mathematische Erwartung oder das theoretische arithmetische Mittel, den mittleren Fehler und den wahrscheinlichsten Wert von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ zu ergänzen. Bezeichnet man allgemein mit $\mathfrak{E}(x)$ die

[1] Der hohe Grad der Genauigkeit der Werte $P_{n'}(\chi^2)$ bei Pearson steht übrigens in einem gewissen Widerspruch zu der Tatsache, daß bei dem praktischen Gebrauch, den er selbst und seine Schule von diesen Werten machen, die Funktion $P_{n'}(\chi^2)$ als solche nur näherungsweise die dabei in Frage kommende Wahrscheinlichkeit ausdrückt. Es handelt sich nämlich da um die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte aus n' Beobachtungsfehlern gebildete Größe (die aber nicht identisch ist mit der Summe der betreffenden »abgewogenen« Fehlerquadrate) den Wert χ^2 überschreite. Wäre $P_{n'}(\chi^2)$ ein genauer Ausdruck dieser Wahrscheinlichkeit, so müßte der mittlere Fehler der in Frage stehenden empirischen Größe genau gleich $\sqrt{2(n'-1)}$ sein; und das trifft eben nicht zu. Näheres hierüber in meiner Schrift »Die Iterationen«, Berlin 1917, S. 62 bis 66. Vergl. Richard Greiner, Ueber das Fehlersystem der Kollektivmaßlehre, in der Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 57, 1909, S 121 bis 158, 225 bis 260, 337 bis 373. Hier (S. 355 bis 357) findet sich, wie bei mir in den »Iterationen«, eine Ableitung des betreffenden mittleren Fehlers. Die — von der meinigen abweichende — Methode der Ableitung ist durchaus einwandfrei, und Greiner wäre auch zu einem mit dem meinigen übereinstimmenden Ergebnis gekommen, wenn er sich nicht, ganz am Schluß, bei Zusammenziehung gewisser Summanden, verrechnet hätte. Auf S. 356 muß nämlich die letzte Formel (Zeile 3 von unten) nicht

$$2\frac{n-1+s}{n}(s-1) + \sum_1^s{}_i \frac{1-p_i}{n p_i}, \quad \text{sondern} \quad \frac{2(n-1)-s}{n}(s-1) + \sum_1^s{}_i \frac{1-p_i}{n p_i}$$

lauten. Letzterer Ausdruck kann aber auch als

$$\frac{2(n-1)(s-1)-s^2}{n} + \frac{1}{n}\sum_1^s{}_i \frac{1}{p_i}$$

geschrieben werden, und er steht in dieser Form mit meiner Formel (42) auf S. 64 der »Iterationen« vollständig im Einklang. Dabei ist zu beachten, daß den Greinerschen Bezeichnungen n, s, p_i der Reihe nach meine Bezeichnungen s, m, π_i entsprechen.

mathematische Erwartung einer beliebigen Größe x, so findet man unter Berücksichtigung von (9) und (10):

$$\mathfrak{E}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2\right) = \int_0^\infty f_n(s)\, s\, ds = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} e^{-s}\, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n}{2} \qquad (18),$$

$$\mathfrak{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2\right)^2\right\} = \int_0^\infty f_n(s)\, s^2\, ds = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}+1} e^{-s}\, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n\,(n+2)}{4} \qquad (19)$$

und, nebenbei bemerkt, allgemein, d. h. für eine beliebige ganze positive Zahl r:

$$\mathfrak{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2\right)^r\right\} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+r-1\right) = \frac{n\,(n+2)\ldots(n+2r-2)}{2^r} \qquad (20).$$

Man erhält ferner auf der Grundlage von (18) und (19) den mittleren Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, der mit μ_n bezeichnet werden soll, aus der bekannten Beziehung zwischen den Erwartungswerten $\mathfrak{E}(x)$, $\mathfrak{E}(x^2)$ und dem mittleren Fehler von x:

$$\mu_n = \sqrt{\frac{n\,(n+2)}{4} - \frac{n^2}{4}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \qquad (21).$$

Der wahrscheinlichste Wert $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, der mit s' bezeichnet werden möge, entspricht der Bedingung

$$f_n(s') = \text{maximum},\quad f_n'(s') = \frac{s'^{\frac{n-4}{2}}\, e^{-s'}\left(\frac{n-2}{2} - s'\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 0,$$

woraus

$$s' = \frac{n}{2} - 1$$

hervorgeht (man überzeugt sich leicht davon, daß $f_n''(s) < 0$ bei $s = \frac{n}{2} - 1$). In der Tatsache, daß s' um 1 hinter der mathematischen Erwartung von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ zurückbleibt, kommt der asymmetrische Charakter des für die Größe $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ maßgebenden Fehlergesetzes zum Ausdruck.

4. Das für $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ maßgebende Fehlergesetz und seine Beziehungen zum Gaußschen Fehlergesetz. Da die mathematische Erwartung von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ laut Formel (18) $\frac{n}{2}$ ist, so entspricht einem Wert s von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ ein zufälliger Fehler von der Größe $s - \frac{n}{2}$. Man setze $s - \frac{n}{2} = v$ und bezeichne mit $\varphi_n(v)\, dv$ die Wahrscheinlichkeit für einen zufälligen Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, zwischen v und $v + dv$ enthalten zu sein. Es ist $\varphi_n(v)\, dv = f_n(s)\, ds$, und man braucht nur in (9) s durch $\frac{n}{2} + v$ zu ersetzen, um zu dem analytischen Ausdruck von $\varphi_n(v)$ zu gelangen. Man findet:

$$\varphi_n(v) = \frac{\left(\frac{n}{2}+v\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-v}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) e^{\frac{n}{2}}} \qquad (22).$$

Es kann nun gezeigt werden, daß das durch diese Formel dargestellte Fehlergesetz mit wachsendem n in das Gaußsche Fehlergesetz übergeht, d. h. daß $\varphi_n(v)$ dem Grenzwert

$$\gamma_n(v) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 v^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

zustrebt, wobei $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Bestimmt man, nebenbei bemerkt, hieraus den mittleren Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$, so erhält man in Uebereinstimmung mit (21):

$$\sqrt{\int_0^\infty \frac{2H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 v^2} v^2 \, dv} = \frac{1}{H\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots (24).$$

Der in Frage stehende Uebergang vollzieht sich mittels der Formel

$$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n(n+1)(n+2)}\cdots} \sqrt{2\pi}\ ^{1)}.$$

Diese Formel ergibt:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots} \sqrt{2\pi}$$

oder auch:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{n\pi}\, e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots},$$

so daß man zunächst aus (22)

$$\varphi_n(v) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{2v}{n}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-v-\frac{1}{6n}+\frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots} \quad \ldots (22')$$

erhält. Man setze sodann $\frac{v}{n} = w$ und beachte im folgenden, daß mit Rücksicht auf (21) w von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist. Es ist nunmehr:

$$\varphi_n(v) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (1 + 2w)^{\frac{n}{2}-1} e^{-nw-\frac{1}{6n}+\frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots}$$

oder auch:

$$\log \operatorname{nat} \varphi_n(v) = -\log \operatorname{nat} \sqrt{n\pi} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log \operatorname{nat}(1 + 2w) - nw - \frac{1}{6n} + \frac{1}{45n(n+2)(n+4)} \cdots \quad (25).$$

Hieraus gewinnt man schließlich für $\log \operatorname{nat} \varphi_n(v)$ folgenden Ausdruck:

$$\log \operatorname{nat} \varphi_n(v) = -(\log \operatorname{nat} \sqrt{n\pi} + nw^2) + \left(\frac{4}{3} nw^3 - 2w\right) - \left(2nw^4 - 2w^2 + \frac{1}{6n}\right) + \left(\frac{16}{5} nw^5 - \frac{8}{3} w^3\right) - \ldots \quad (25').$$

Demgegenüber erhält man aus (23):

$$\log \operatorname{nat} \gamma_n(v) = -(\log \operatorname{nat} \sqrt{n\pi} + nw^2) \quad \ldots \ldots \ldots (23').$$

Sofern man die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n\sqrt{n}}$ usw. hierbei vernachlässigt, stimmen also die natürlichen Logarithmen von $\varphi_n(v)$ und von $\gamma_n(v)$ miteinander überein. Damit ist erwiesen, daß das für $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ maßgebende Fehlergesetz mit wachsendem n in der Tat allmählich in das Gaußsche Fehlergesetz übergeht, und zwar in dem Sinne, daß wenn man den Wert $w\sqrt{n}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{v}{\sqrt{n}}$ (nicht aber w!) festhält, der

[1] Siehe O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Braunschweig 1866, Bd. 2, S. 259. Vergl. W. Láska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik, Braunschweig 1888, S. 269.

Quotient $\varphi_n(v):\gamma_n(v)$ mit wachsendem n der Einheit zustrebt. Das tritt am deutlichsten zutage, wenn man $\varphi_n(v)$ als Funktion nicht mehr von n und w, sondern von n und $w\sqrt{n}$ darstellt. Man setze $w\sqrt{n} = r$. Dann findet man aus (25′) und (23′):

$$\frac{\varphi_n(v)}{\gamma_n(v)} = e^{\left(\frac{4\,r^3}{3\sqrt{n}} - \frac{2\,r}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{2\,r^4}{n} - \frac{2\,r^2}{n} + \frac{1}{6\,n}\right) + \dots}.$$

Es erübrigt, zu bestimmen, für welche Werte bezw. Wertbereiche von v die Gleichung $\varphi_n(v) = \gamma_n(v)$ bezw. die Ungleichungen $\varphi_n(v) > \gamma_n(v)$ und $\varphi_n(v) < \gamma_n(v)$ platzgreifen. Hierzu bilde man die halbe Differenz

$$\frac{\log\text{nat}\,\varphi_n(v) - \log\text{nat}\,\gamma_n(v)}{2} = \eta(w) \quad \dots\dots\dots \quad (26).$$

Aus (25) und (23′) folgt:

$$2\,\eta(w) = n\,w^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\log\text{nat}\,(1 + 2\,w) - n\,w - \frac{1}{6\,n} + \frac{1}{45\,n\,(n+2)\,(n+4)} \dots,$$

woraus sich durch drei sukzessive Differentiationen

$$\frac{d^3\,\eta(w)}{d\,w^3} = \frac{4\,(n-2)}{(1 + 2\,w)^3} \quad \dots\dots\dots \quad (27)$$

ergibt. Nun hat man aber: $1 + 2\,w \geq 0$, weil $1 + 2\,w = 1 + \frac{2\,v}{n} = \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2} + v\right) = \frac{2\,s}{n}$. Die dritte Ableitung von $\eta(w)$ wechselt demnach ihr Vorzeichen nicht. Daher kann $\eta(w)$ höchstens drei Nullstellen haben; dementsprechend kann es höchstens drei voneinander verschiedene Werte von v geben, für welche $\varphi_n(v) = \gamma_n(v)$. Die Wurzeln dieser Gleichung seien, ohne daß hiermit der Entscheidung der Frage, ob sie tatsächlich sämtlich voneinander verschieden sind, vorgegriffen wird, mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet, wobei $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. Man setze ferner:

$$w = \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n\sqrt{n}} + \dots \quad \eta(w) = \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n\sqrt{n}} + \dots \quad \dots \quad (28)$$

und für $m = 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{v_m}{n} = w_m, \quad \frac{n}{2} + v_m = s_m, \\ w_m = \frac{a_m}{\sqrt{n}} + \frac{b_m}{n} + \frac{c_m}{n\sqrt{n}} + \dots, \quad \eta(w_m) = \frac{A_m}{\sqrt{n}} + \frac{B_m}{n} + \frac{C_m}{n\sqrt{n}} + \dots \end{array}\right\} \quad (29).$$

Auf der Grundlage von (25′), (23′) und (26) findet man:

$$\eta(w) = \left(\frac{2}{3}\,n\,w^3 - w\right) - \left(n\,w^4 - w^2 + \frac{1}{12\,n}\right) + \left(\frac{8}{5}\,n\,w^5 - \frac{4}{3}\,w^3\right) - \dots \quad (30).$$

Setzt man alsdann in (30) für w seinen durch (28) gegebenen Ausdruck ein, so nimmt $\eta(w)$ eine der dortigen Formel entsprechende Gestalt an, wobei, wie man sofort einsieht, A nur von a, B nur von a und b, C nur von a, b und c abhängt usw. Man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{2\,a^3}{3} - a, \quad B = -\,a^4 + a^2 + (2\,a^2 - 1)\,b - \frac{1}{12}, \\ C = 2\,a\left(\frac{4\,a^4}{5} - \frac{2\,a^2}{3} - 2\,a^2\,b + b + b^2\right) + (2\,a^2 - 1)\,c \end{array}\right\} \quad \dots \quad (31).$$

Es ist nun $\eta(w_m) = 0$; daher findet man a_m, b_m, $c_m \dots$ nacheinander aus $A_m = 0$, $B_m = 0$, $C_m = 0, \dots$ Die Gleichung $A_m = 0$ liefert laut (31) die drei Werte:

$$a_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (32).$$

Man hat ferner für $m = 1, 2, 3$

$$B_m = -\,a_m^4 + a_m^2 + (2\,a_m^2 - 1)\,b_m - \frac{1}{12} = 0$$

zu setzen, und findet hieraus, mit Rücksicht auf (32):

$$b_1 = \frac{5}{12}, \quad b_2 = -\frac{1}{12}, \quad b_3 = \frac{5}{12} \quad \dots\dots\dots \quad (33).$$

Setzt man gleicherweise laut (31) für $m = 1, 2, 3$

$$C_m = 2\,a_m\left(\frac{4\,a_m^4}{5} - \frac{2\,a_m^2}{3} - 2\,a_m^2\,b_m + b_m + b_m^2\right) + (2\,a_m^2 - 1)\,c_m = 0,$$

so ergeben sich hieraus, mit Rücksicht auf (32) und (33), die Werte:

$$c_1 = \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = -\frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Die in (32), (33) und (34) angegebenen Lösungen gestatten die Unbekannten w_1, w_2 und w_3 näherungsweise, und zwar mit einem Fehler von der Größenordnung $\frac{1}{n^2}$, zu bestimmen: auf (29) zurückgreifend, erhält man:

$$w_1 = -\sqrt{\frac{3}{2\,n}} + \frac{5}{12\,n} + \frac{101}{720\,n}\sqrt{\frac{3}{2\,n}}, \quad w_2 = -\frac{1}{12\,n}, \quad w_3 = \sqrt{\frac{3}{2\,n}} + \frac{5}{12\,n} - \frac{101}{720\,n}\sqrt{\frac{3}{2\,n}} \quad (35)$$

und dementsprechend wegen (29):

$$v_1 = -\sqrt{\frac{3\,n}{2}} + \frac{5}{12} + \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2\,n}}, \quad v_2 = -\frac{1}{12}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{3\,n}{2}} + \frac{5}{12} - \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2\,n}} \quad (36),$$

sowie

$$s_1 = \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{3\,n}{2}} + \frac{5}{12} + \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2\,n}}, \quad s_2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{12}, \quad s_3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{3\,n}{2}} + \frac{5}{12} - \frac{101}{720}\sqrt{\frac{3}{2\,n}} \quad (37).$$

Es ergeben sich nach dem Vorstehenden vier Wertbereiche von v bezw. von s, in deren Grenzen die Differenz $\varphi_n(v) - \gamma_n(v)$ ihr Vorzeichen nicht ändert. Man hat aber:

$$\varphi_n(0) = \frac{e^{-\frac{1}{6\,n} + \frac{1}{45\,n\,(n+2)\,(n+4)} \cdots}}{\sqrt{n\,\pi}}, \qquad \gamma_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}},$$

somit $\varphi_n(0) - \gamma_n(0) < 0$. Der Wert 0 von v bezw. $\frac{n}{2}$ von s fällt in den Bereich der Werte v_2 bis v_3 von v bezw. s_2 bis s_3 von s; daher ist die Differenz $\varphi_n(v) - \gamma_n(v)$ in diesem Bereich und folglich auch im Bereich der Werte $-\frac{n}{2}$ bis v_1 von v bezw. 0 bis s_1 von s negativ, hingegen im Bereich der Werte v_1 bis v_2 von v bezw. s_1 bis s_2 von s und im Bereich der Werte v_3 bis ∞ von v bezw. s_3 bis ∞ von s positiv.

5. Bemerkungen zu den graphischen Darstellungen. In Abb. 1 sind für $n = 20$ und in Abb. 2 für $n = 100$ die beiden Funktionen $\varphi_n(v)$ und $\gamma_n(v)$ dargestellt, und zwar $\varphi_n(v)$ als ausgezogene, $\gamma_n(v)$ als gestrichelte Kurve. Auf der Abszissenachse sind die Werte von s angegeben, die mit den zugehörigen Werten von v nach Maßgabe der Formel $v = s - \frac{n}{2}$ zusammenhängen.

Bei $n = 20$ erhält man den Formeln (37) zufolge:

$$s_1 = 4{,}98, \qquad s_2 = 9{,}92, \qquad s_3 = 15{,}86.$$

Gleiche oder nur wenig davon abweichende Werte erhält man durch lineare Interpolation auf der Grundlage der gegebenen Reihen der Werte $\varphi_n(v)$ und $\gamma_n(v)$. Die interpolierten Werte seien mit s_1', s_2', s_3' bezeichnet. Man hat:

s	v	$f_n(s) = \varphi_n(v)$	$\gamma_n(v)$
4	-6	0,01323	0,02085
5	-5	0,03627	0,03614

Es sei nun $s_1' = 4 + \lambda$. Aus der Gleichung

$$\varphi_n(-6) + \lambda\,\{\varphi_n(-5) - \varphi_n(-6)\} = \gamma_n(-6) + \lambda\,\{\gamma_n(-5) - \gamma_n(-6)\}$$

findet man:

$$\lambda = \frac{\gamma_n(-6) - \varphi_n(-6)}{\{\gamma_n(-6) - \varphi_n(-6)\} + \{\varphi_n(-5) - \gamma_n(-5)\}},$$

somit

$$\lambda = \frac{0{,}00762}{0{,}00762 + 0{,}00013} = \frac{762}{775} = 0{,}98$$

und $s_1' = 4{,}98$. Dieselbe Methode liefert die Werte $s_2' = 9{,}92$, $s_3' = 15{,}89$. Man überzeugt sich davon, daß s_3 genauer als s_3' ist, aus folgender Zusammenstellung:

s	v	$f_n(s) = \varphi_n(v)$	$\gamma_n(v)$	$10^5\,\{\varphi_n(v) - \gamma_n(v)\}$
15,86	5,86	0,02265	0,02266	-1
15,89	5,89	0,02236	0,02226	10

Bei $n = 100$ erhält man nach den Formeln (37)

$$s_1 = 38{,}19, \qquad s_2 = 49{,}92, \qquad s_3 = 62{,}65$$

und nach obiger Interpolationsmethode:

$$s_1' = 38{,}16, \qquad s_2' = 49{,}92, \qquad s_3' = 62{,}68.$$

Nachstehende Tabelle zeigt, daß die Werte s_1, s_2 und s_3 bis auf die zweite Dezimale inklusive exakte Lösungen darstellen (was übrigens auch im Fall $n = 20$ zutrifft) und daß die Werte s_1' und s_3' ungenau sind.

s	v	$f_n(s) = \varphi_n(v)$	$\gamma_n(v)$	$10^6 \{\varphi_n(v) - \gamma_n(v)\}$
38,16	−11,84	0,013868	0,013886	−18
38,17	−11,83	0.013908	0,013919	−11
38,18	−11.82	0,013948	0.013953	− 5
38,19	−11.81	0.013987	0,013985	2
38,20	−11,80	0,014027	0,014019	8
49,91	− 0,09	0,056422	0.056414	8
49,92	− 0,08	0,056412	0,056415	− 3
49,93	− 0,07	0.056403	0,056416	−13
62,64	12 64	0,011414	0.011417	− 3
62,65	12,65	0,011389	0,011388	1
62,66	12.66	0,011364	0,011359	5
62,67	12,67	0,011339	0,011331	8
62,68	12,68	0,011315	0,011302	13

In Abb. 3 und 4 versinnbildlichen für $n = 20$ bezw. $n = 100$ die ausgezogenen Kurven den Verlauf der Funktion $F_n(z)$, d. h. der Wahrscheinlichkeit, daß $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ kleiner als z ist, und die gestrichelten Kurven den Verlauf der Funktion $G_n(z)$, welche dieselbe Wahrscheinlichkeit ausdrücken würde, wenn hier das Gaußsche Fehlergesetz mit der Präzision $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$ Anwendung fände, wobei die

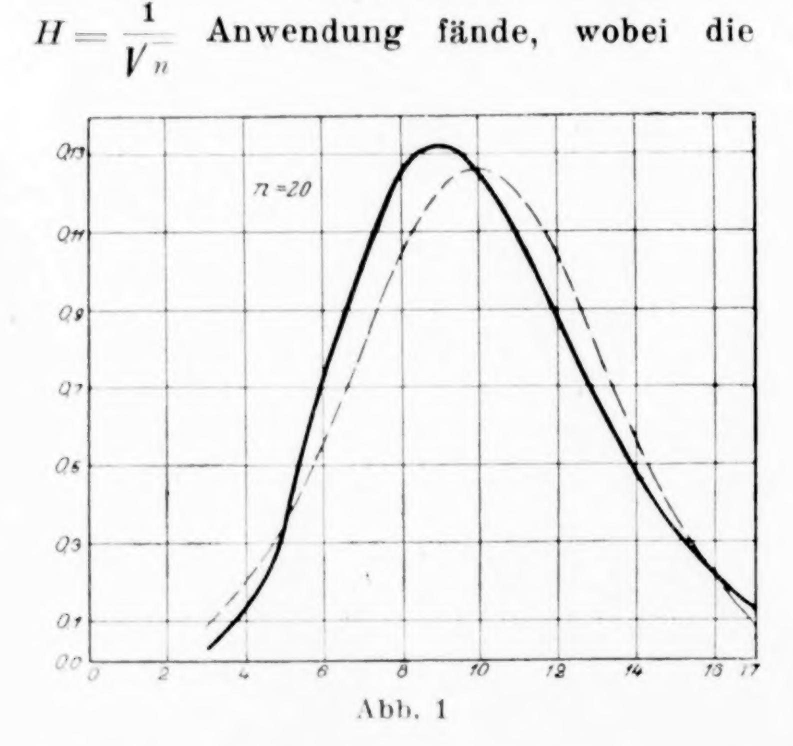


Abb. 1

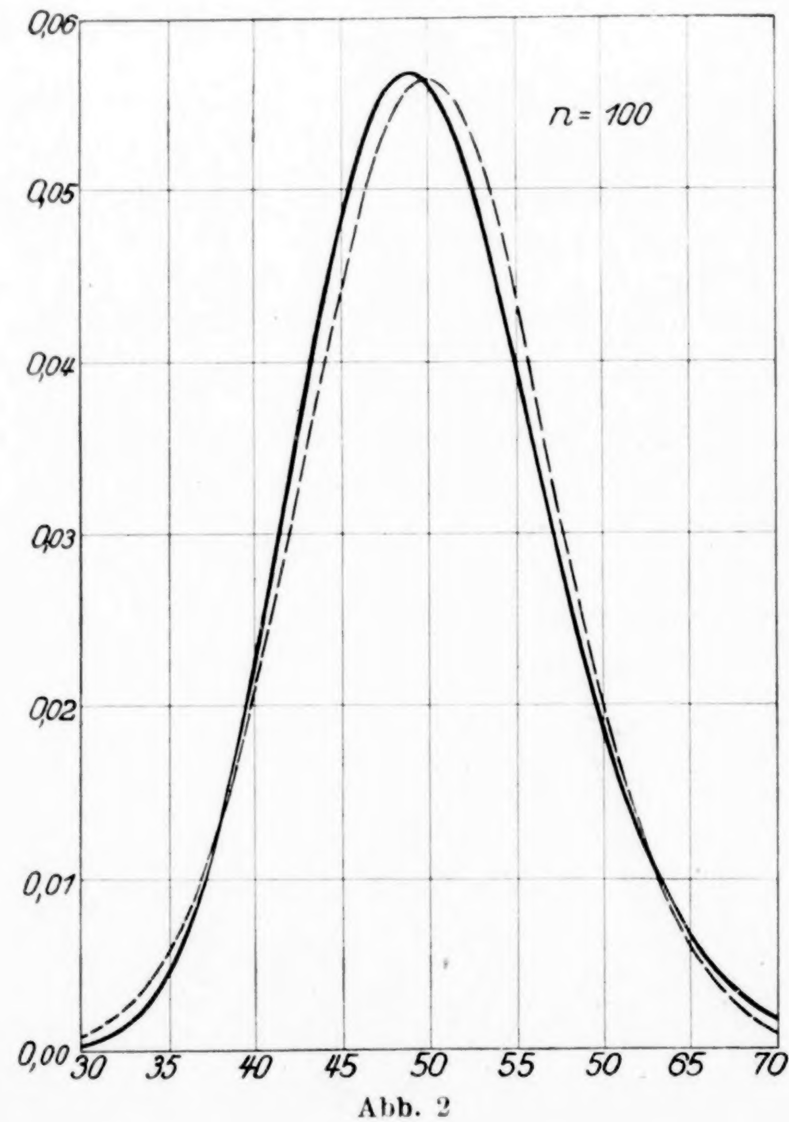


Abb. 2

Werte z auf der Abszissenachse aufgetragen sind. Es ist also:

$$G_n(z) = \int_{-\infty}^{z - \frac{n}{2}} \gamma_n(v)\, d\, v \qquad \text{oder nach (23):} \quad G_n(z) = \int_{-\infty}^{z - \frac{n}{2}} \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 v^2} d\, v \quad . \quad . \quad (38).$$

Setzt man hierin $H v = t$ und $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$, so erhält man:

$$G_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-t^2} d t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-t^2} d t,$$

welch letztere Formel sich mit Hilfe der Bezeichnung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} d t = \Phi(x), \text{ und weil darnach } \Phi(-x) = -\Phi(x),$$

auch so darstellen läßt:

$$G_n(z) = \frac{1 + \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}\right)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38').$$

Bei $z = \frac{n}{2}$ ist $G_n(z) = \frac{1}{2}$. Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit eines negativen Fehlers hier gleich $\frac{1}{2}$ ist, d. h. ebenso groß wie die Wahrscheinlichkeit eines positiven Fehlers, was durch den symmetrischen Charakter des Gaußschen Fehlergesetzes bedingt wird. So nehmen denn auch die Ordinaten $G_n(z)$ auf Abb. 3 bei $z = 10$ und auf Abb. 4 bei $z = 50$ den Wert 0,5 an. Demgegenüber zeigen die Ordinaten $F_n(z)$ auf Abb. 3 bei $z = 10$ und auf Abb. 4 bei $z = 50$ höhere Werte als 0,5 an, und darin kommt eben der asymmetrische Charakter des für $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ tatsächlich maßgebenden Fehlergesetzes zum Ausdruck.

Bezeichnet man die hiernach bestehende Wahrscheinlichkeit eines negativen Fehlers von $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ mit p_n und die eines positiven Fehlers mit q_n, so ist

$$p_n = F_n\left(\frac{n}{2}\right), \qquad q_n = 1 - F_n\left(\frac{n}{2}\right)$$

oder, der Formel (16) zufolge:

$$p_n = 1 - P_{n+1}(n), \qquad q_n = P_{n+1}(n).$$

Aus nachstehender Zahlentafel ersieht man, daß die Differenz $p_n - q_n$ mit wachsendem n immer kleiner wird, aber auch, daß sie noch bei ziemlich großen Werten von n nicht unbeträchtlich ist.

n	1	2	3	4	5	10	15	20	25	100
p_n	0,6826	0,6321	0,6084	0,5940	0,5841	0,5595	0,5486	0,5421	0,5376	0,5188
q_n	0,3174	0,3679	0,3916	0,4060	0,4159	0,4405	0,4514	0,4574	0,4624	0,4812
$p_n - q_n$	0,3652	0,2642	0,2168	0,1880	0,1682	0,1190	0,0972	0,0842	0,0752	0,0376

Für die Wahrscheinlichkeiten p_n und q_n lassen sich leicht gute Annäherungen finden. Wegen (26) hat man:

$$\varphi_n(v) = \gamma_n(v)\, e^{2\eta(w)} = \gamma_n(v)\left[1 + 2\eta(w) + 2\{\eta(w)\}^2 + \ldots\right].$$

Hieraus erhält man, wenn man Formel (30) heranzieht und w durch $\frac{v}{n}$ ersetzt:

$$\varphi_n(v) = \gamma_n(v)\left\{1 - \left(\frac{2v}{n} - \frac{4v^3}{3n^2}\right) + \left(\frac{4v^2}{n^2} - \frac{14v^4}{3n^3} + \frac{8v^6}{9n^4} - \frac{1}{6n}\right) \ldots\right\}.$$

Es ist nun:

$$q_n = \int\limits_0^\infty \varphi_n(v)\, d v,$$

und es ergibt sich daher mit Benutzung der neuen Bezeichnung $2\int_0^\infty \gamma_n(v)\, v^r\, dv = \sigma_r$:

$$q_n = \left(1 - \frac{1}{6n}\right)\frac{\sigma_0}{2} - \left(\frac{\sigma_1}{n} - \frac{2\sigma_3}{3n^2}\right) + \left(\frac{2\sigma_2}{n^2} - \frac{7\sigma_4}{3n^3} + \frac{4\sigma_6}{9n^4}\right)\dots$$

Es bestehen aber die bekannten Beziehungen:

$$\sigma_0 = 1,\ \sigma_1 = \frac{1}{H\sqrt{\pi}},\ \sigma_2 = \frac{1}{2H^2},\ \sigma_3 = \frac{1}{H^3\sqrt{\pi}},\ \sigma_4 = \frac{1}{4H^4},\ \sigma_6 = \frac{15}{8H_6}\dots,$$

oder da $H = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{n}{\pi}},\ \sigma_2 = \frac{n}{2},\ \sigma_3 = \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}},\ \sigma_4 = \frac{3n^2}{4},\ \sigma_6 = \frac{15n^3}{8}\dots,$$

und setzt man diese Werte von $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \dots$ in den obigen Ausdruck für q_n ein, so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{1}{n\sqrt{n}}, \frac{1}{n^2}$ usw. (also unter Mitberücksichtigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{1}{n}$, die sich hier gegeneinander aufheben!):

$$q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}, \quad \text{somit auch} \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}.$$

Die Unterschiede zwischen den Werten von p_n und q_n, die diese Näherungsformeln liefern, und ihren genauen Werten sind schon bei mäßigen Werten von n minimal. So erhält man z. B. bei $n = 5$, 15, 25 für p_n die genauen Werte 0,58412, 0,54858, 0,53763 und auf Grund der Formel $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}$ die Näherungswerte 0,58410, 0,54856, 0,53761.

Abb. 3

6. Der durchschnittliche Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$.

Es sei ϑ_n die mathematische Erwartung von $\left|s - \frac{n}{2}\right|$ oder der (theoretische) durchschnittliche Fehler von $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$. Man hat zunächst:

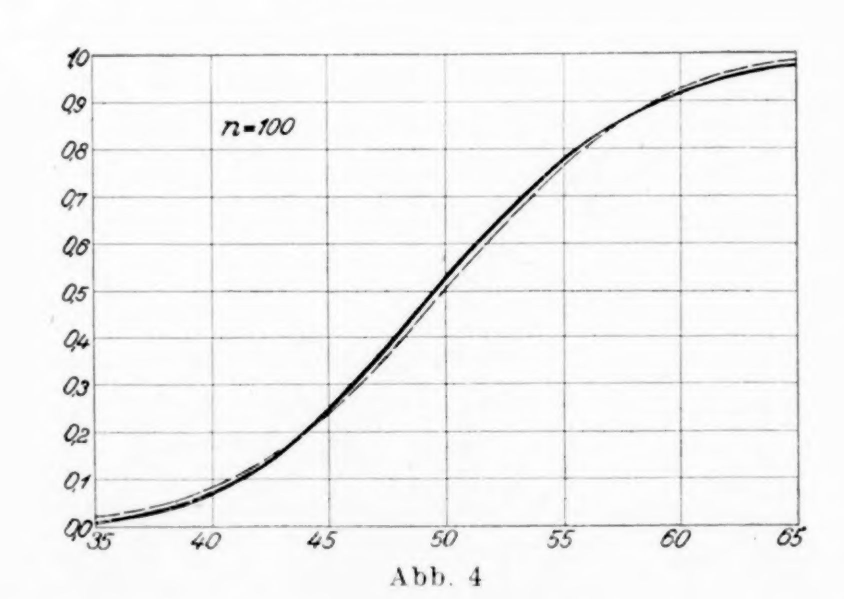


Abb. 4

$$\vartheta_n = -\int_{-\frac{n}{2}}^{0} q_n'(v)\, v\, dv + \int_0^\infty q_n(v)\, v\, dv \quad \dots\dots\dots \quad (39).$$

Es ist aber

$$\int_{-\frac{n}{2}}^{\infty} \varphi_n(v)\, v\, dv = 0, \quad \text{daher} \quad -\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, v\, dv = \int_{0}^{\infty} \varphi_n(v)\, v\, dv,$$

so daß (39) auch in der Form

$$\vartheta_n = -2\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, v\, dv = 2\int_{0}^{\frac{n}{2}} f_n(s)\left(\frac{n}{2} - s\right) ds \quad \ldots\ldots \quad (39')$$

dargestellt werden kann.

Auf der Grundlage der Formel (9) findet man alsdann:

$$\frac{d}{ds}\{s\, f_n(s)\} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{s^{\frac{n}{2}} e^{-s}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right\} = \frac{s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s}\left(\frac{n}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = f_n(s)\left(\frac{n}{2} - s\right).$$

Folglich erhält man aus (39'):

$$\vartheta_n = n\, f_n\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (39'').$$

Für den praktischen Gebrauch muß dieses Ergebnis in folgender Weise umgeformt werden. Bei n ungerade hat man

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1.3\ldots(n-2)}{2^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{\pi} = \frac{(n-1)!\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\, 2^{n-1}}, \quad \text{somit} \quad \vartheta_n = \frac{(2n)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!} \quad (40')$$

und bei n gerade:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right)! = \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2}\right)!, \quad \text{somit} \quad \vartheta_n = \frac{n\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \ldots \quad (40'').$$

Zur Bestimmung von ϑ_n für $n = 2$, 3 usw. bis 28 kann man sich auch der Pearsonschen Tafel XII bedienen. Aus (39') findet man nämlich, mit Rücksicht auf (9) und (11):

$$\vartheta_n = n\left\{F_n\left(\frac{n}{2}\right) - F_{n+2}\left(\frac{n}{2}\right)\right\} \text{ oder wegen (16): } \vartheta_n = n\{P_{n+3}(n) - P_{n+1}(n)\} \quad (41).$$

Der Ausdruck für ϑ_n, wie ihn Formel (39'') liefert, verwandelt sich mit Hilfe der Formel (22'), in Anbetracht dessen, daß $f_n\left(\frac{n}{2}\right) = \varphi_n(0)$, in

$$\vartheta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{6n} + \frac{1}{45n(n+2)(n+4)}\cdots}.$$

Hieraus ergeben sich die Näherungsformeln

$$\vartheta_n = \frac{6n-1}{6n}\sqrt{\frac{n}{\pi}}, \qquad \vartheta_n = \frac{6n}{6n+1}\sqrt{\frac{n}{\pi}}, \qquad \vartheta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \quad \ldots \quad (42).$$

Der letzte Ausdruck für ϑ_n entspricht der Annahme, daß für $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2$ das Gaußsche Fehlergesetz maßgebend ist. Unter dieser Annahme findet man in der Tat:

$$\vartheta_n = -2\int_{-\infty}^{0} \gamma_n(v)\, v\, dv = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} 2He^{-H^2 v^2}\, v\, dv = \frac{1}{H\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Nachstehende Zahlentafel enthält für einige Werte von n die Werte von ϑ_n, berechnet 1. nach einer der beiden Formeln (40') oder (40'') oder auch nach Formel (41); 2., 3., 4. nach (42). Bemerkenswert ist es, wie sich namentlich die zweite Formel in (42) selbst bei den kleinsten Werten von n bewährt.

n	Genauer Wert von ϑ_n	$\frac{6n-1}{6n}\sqrt{\frac{n}{\pi}}$	$\frac{6n}{6n+1}\sqrt{\frac{n}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{n}{\pi}}$
1	0,4839	0,4702	0,4836	0,5642
2	0,7358	0,7314	0,7365	0,7979
3	0,9251	0,9229	0,9258	0,9772
4	1,0827	1,0814	1,0832	1,1284
5	1,2204	1,2195	1,2208	1,2615
10	1,7547	1,7544	1,7547	1,7841
15	2,1610	2,1608	2,1610	2,1850
20	2,5022	2,5021	2,5022	2,5231
25	2,8022	2,8021	2,8022	2,8209
100	5,6325	5,6325	5,6325	5,6419

Der durchschnittliche Fehler ϑ_n läßt sich als (gewogenes) arithmetisches Mittel des entsprechenden positiv genommenen negativen und des entsprechenden positiven durchschnittlichen Fehlers darstellen. Bezeichnet man ersteren mit ϑ_n' und letzteren mit ϑ_n'', so hat man:

$$\vartheta_n' = \frac{-\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, v\, dv}{\int_{-\frac{n}{2}}^{0} \varphi_n(v)\, dv}, \qquad \vartheta_n'' = \frac{\int_{0}^{\infty} \varphi_n(v)\, v\, dv}{\int_{0}^{\infty} \varphi_n(v)\, dv}, \quad \vartheta_n = \frac{p_n \vartheta_n' + q_n \vartheta_n''}{p_n + q_n} = p_n \vartheta_n' + q_n \vartheta_n'' \quad (43).$$

Es ist aber $-p_n \vartheta_n' + q_n \vartheta_n'' = 0$, so daß aus (43)

$$\vartheta_n' = \frac{\vartheta_n}{2 p_n}, \qquad \vartheta_n'' = \frac{\vartheta_n}{2 q_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

folgt. Die Rechnung ergibt:

n	1	2	3	4	5	10	15	20	25	100
ϑ_n'	0,354	0 582	0,760	0,911	1,045	1,568	1,970	2,308	2,606	5,428
ϑ_n''	0,762	1,000	1,181	1,333	1,467	1,992	2,394	2,732	3,030	5,852
$\vartheta_n'' - \vartheta_n'$	0,408	0,418	0,421	0.422	0,422	0,424	0,424	0,424	0,424	0,424

Das Ergebnis $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = 0{,}424$ bei $n = 10$, 15 usw. steht mit den vorhin abgeleiteten Näherungsformeln für p_n und q_n sowie für ϑ_n im Einklang. Man findet nämlich aus (44): $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = \frac{(p_n - q_n)\,\vartheta_n}{2\, p_n\, q_n}$ und braucht nur $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}$, $q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{n\pi}}$, daher $p_n - q_n = \frac{2}{3\sqrt{n\pi}}$, $p_n q_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{9 n \pi}\right)$, sowie $\vartheta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}$ zu setzen, um zunächst $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = \frac{4}{3\pi\left(1 - \frac{4}{9n\pi}\right)}$ und als Endresultat (da die Beibehaltung des eingeklammerten Faktors im Nenner offenbar sinnlos wäre): $\vartheta_n'' - \vartheta_n' = \frac{4}{3\pi} = 0{,}424413$ zu bekommen.

7. Folgerungen in bezug auf den Divergenzkoeffizienten. Die Maßgröße, welche in der mathematischen Statistik als Divergenzkoeffizient bezeichnet zu werden pflegt, wird in dem Fall, wo die in Frage kommenden n Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit sind, durch

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i^2}{m_i^2}}$$

dargestellt, wobei ε_i, wie im Vorangehenden, die Beobachtungsfehler und m_i die zugehörigen mittleren Fehler sind. Folgen nun die Fehler ε_i dem Gaußschen Fehlergesetz und werden die zugehörigen Präzisionen mit h_i bezeichnet, so bestehen die Beziehungen $m_i = \frac{1}{h_i\sqrt{2}}$. Demgemäß erhält man für den Divergenzkoeffizienten, der mit Q_n bezeichnet werden möge, die Formel:

$$Q_n = \sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^2\,\varepsilon_i^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Q_n zwischen α und $\alpha + d\,\alpha$ enthalten ist, sei mit $\omega_n(\alpha)\,d\,\alpha$ bezeichnet. Es ist $\alpha = \sqrt{\frac{2\,s}{n}}$ oder auch $s = \frac{n\,\alpha^2}{2}$, daher $\frac{d\,s}{d\,\alpha} = n\,\alpha$, und man hat:

$$\omega_n(\alpha)\,d\,\alpha = f_n(s)\,d\,s,\quad \omega_n(\alpha) = n\,\alpha\,f_n(s).$$

Greift man nunmehr auf (9) zurück, so ergibt sich:

$$\omega_n(\alpha) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\alpha^{n-1}\,e^{-\frac{n\,\alpha^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45).$$

Hiermit ist das für Q_n maßgebende Verteilungsgesetz gewonnen. Dementsprechend erhält man die mathematische Erwartung oder das (theoretische) arithmetische Mittel von Q_n in der Form:

$$\mathfrak{E}(Q_n) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \alpha^n\,e^{-\frac{n\,\alpha^2}{2}}\,d\,\alpha.$$

Es ist aber:

$$\int_0^\infty \alpha^n\,e^{-\frac{n\,\alpha^2}{2}}\,d\,\alpha = \frac{1}{n}\int_0^\infty \left(\frac{2\,s}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-s}\,d\,s,$$

daher:

$$\mathfrak{E}(Q_n) = \frac{\sqrt{\frac{2}{n}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}}\,e^{-s}\,d\,s = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (46).$$

Die numerische Auswertung von $\mathfrak{E}(Q_n)$ geschieht am besten in folgender Weise. Auf der Grundlage von (46) hat man auch:

$$\mathfrak{E}(Q_{n+1}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n+1}},$$

und diese Formel im Zusammenhang mit Formel (46) ergibt die Rekursionsformel

$$\mathfrak{E}(Q_{n+1}) = \frac{1}{\mathfrak{E}(Q_n)}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Setzt man in (46) $n = 1$, so findet man: $\mathfrak{E}(Q_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, und von hier aus führt die Rekursionsformel zu den Werten:

$$\mathfrak{E}(Q_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \mathfrak{E}(Q_3) = 2\sqrt{\frac{2}{3\,\pi}},\quad \mathfrak{E}(Q_4) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{usw.}$$

Zieht man aber die Formeln

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{(n+1)\,\pi}\; e^{-\frac{n+1}{2}+\frac{1}{6(n+1)}\cdots}, \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{n\,\pi}\; e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{6n}\cdots}$$

heran, so verwandelt sich Formel (46) in:

$$\mathfrak{E}(Q_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{6n(n+1)}\cdots}.$$

Hieraus folgt:

$$\log \text{nat}\, \mathfrak{E}(Q_n) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{6n^2}\cdots,$$

und man erhält unter Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4}$ usw. die Näherungsformel:

$$\log \text{nat}\, \mathfrak{E}(Q_n) = -\frac{1}{4n} \quad \text{bezw.} \quad \mathfrak{E}(Q_n) = e^{-\frac{1}{4n}}$$

oder die bequemere Näherungsformel

$$\mathfrak{E}(Q_n) = 1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47).$$

Daß letztere Formel auch bei kleinen Werten von n gute Annäherungen liefert, ist aus folgender Zusammenstellung zu ersehen, wo unter (46) die genauen, d. h. nach Formel (46) berechneten und unter (47) die approximativen, d. h. nach Formel (47) berechneten Werte von $\mathfrak{E}(Q_n)$ aufgeführt sind.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(46)	·7979	·8862	·9213	·9400	·9515	·9594	·9650	·9693	·9727	·9754
(47)	·7812	·8828	·9201	·9395	·9512	·9592	·9649	·9692	·9726	·9753

Der wahrscheinlichste Wert von Q_n, der mit α' bezeichnet werden möge, bestimmt sich aus dem Ansatz $\omega_n'(\alpha') = 0$. Formel (45) ergibt: $\alpha' = \sqrt{1-\frac{1}{n}}$. Der wahrscheinlichste Wert der Größe Q_n ist hiernach kleiner als deren (theoretisches) arithmetisches Mittel, d. h. als $\mathfrak{E}(Q_n)$. Da $Q_n \lesseqgtr 1$, je nachdem $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2\,\varepsilon_i^2 \lesseqgtr \frac{n}{2}$, so sind durch die vorher betrachteten Wahrscheinlichkeiten p_n und q_n zugleich die Wahrscheinlichkeiten gegeben, daß $Q_n < 1$ bezw. $Q_n > 1$.

Beim Operieren mit dem Divergenzkoeffizienten liegen die Dinge in der Praxis meist so, daß zunächst die wahren Fehler (ε_i) unbekannt und daher durch die entsprechenden scheinbaren Fehler ersetzt werden müssen, daß sodann auch die genauen Werte der Präzisionen (h_i) fehlen und daß schließlich, sofern den Gegenstand der Beobachtung statistische Häufigkeitszahlen bilden, die in Frage kommenden Fehler nur näherungsweise dem Gaußschen Fehlergesetz folgen. Diese drei Umstände bringen Komplikationen mit sich, auf die im Rahmen dieses Aufsatzes nicht weiter eingegangen werden kann[1]).

8. Anhang. Geometrische Deutung der Funktion $V_n(r_n^2)$. Die zwecks Ableitung der grundlegenden Formel (9) eingeführte Hilfsgröße $V_n(r_n^2)$ stellt $\frac{1}{2^n}$ des »Rauminhalts« einer »n-dimensionalen Kugel« dar, d. h. eines Gebildes, dessen Oberfläche — ein »rechtwinkliges« Koordinatensystem $t_1, t_2 \ldots t_n$, dessen Anfang im Zentrum der Kugel liegt, vorausgesetzt — durch die Gleichung $t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = r_n^2$ bestimmt

[1]) In welcher Weise dem Umstand, daß an Stelle der wahren die scheinbaren Fehler treten, Rechnung zu tragen ist, hat (für den Fall von Beobachtungen gleicher Genauigkeit) **Helmert** in seiner Abhandlung »Die Genauigkeit der Formel von **Peters** zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit« (Astronomische Nachrichten, Bd. 88, 1876, Nr. 2096) gezeigt. Er beweist hier, daß die Wahrscheinlichkeit für die Quadratsumme von n scheinbaren Fehlern, in ein bestimmtes differentielles Intervall zu fallen, gerade so groß ist, wie die Wahrscheinlichkeit für die Quadratsumme von $n-1$ wahren Fehlern in dasselbe differentielle Intervall zu fallen. Vergl. **Czuber**, a. a. O., S. 160—162, und **Pizzetti**, a. a. O., S. 267.

ist. Der Koeffizient $\frac{1}{2^n}$ gibt an, welchen Anteil an der Gesamtzahl aller Koordinaten-Kombinationen die Kombinationen mit lauter positiven Koordinaten haben. Eine »zweidimensionale Kugel« ist ein Kreis und eine »eindimensionale Kugel« ist der Durchmesser eines Kreises.

Bezeichnet man mit $W_n(r_n^2)$ den ganzen Rauminhalt des betreffenden Gebildes, so besteht die Beziehung:

$$W_n(r_n^2) = 2^n V_n(r_n^2) \text{ bezw. bei } r_n = \text{konst.} = r: \quad W_n(r^2) = 2^n V_n(r^2),$$

und man erhält auf Grund der Formeln (3″) und (8):

$$W_n(r^2) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Es ist

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \quad \Gamma(4) = 6$$

usw. Daher:

$$W_1(r^2) = 2r, \quad W_2(r^2) = \pi r^2, \quad W_3(r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad W_4(r^2) = \frac{\pi^2 r^4}{2}, \quad W_5(r^2) = \frac{8\pi^2 r^5}{15} \text{ usw.}$$

Die hierbei in Frage kommende Rekursionsformel ist:

$$W_{n+2}(r^2) = \frac{2\pi r^2}{n+2} W_n(r^2). \qquad [173]$$

Die Dreieckrechentafeln und die hydraulische Energieumwandlungskurve.[1]

Von **OTTO LACMANN** in Kristiania.

Geometrische Grundlage. Ziehen wir durch einen beliebigen, zunächst im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt P Parallele zu den drei Dreieckseiten, so entstehen drei neue, in der Abb. 1 schraffierte, gleichseitige Dreiecke, und wir können unmittelbar aus der Abbildung ersehen, daß die Summe der Seiten dieser Dreiecke gleich der Seite des Ausgangsdreiecks ist, woraus folgt, daß auch die Summe der drei in der Abbildung gestrichelt gezeichneten Höhen gleich ist der Höhe des ursprünglichen Dreiecks. Genau dasselbe läßt sich auf dieselbe Weise für Punkte P beweisen, die außerhalb des Ausgangsdreiecks liegen, sofern wir nur den Loten das positive bezw. negative Vorzeichen geben, je nachdem der Punkt P bezüglich der für das betreffende Lot in Betracht kommenden Dreiecksseite auf derselben bezw. entgegengesetzten Seite wie das Dreieck selbst liegt. Der so gewonnene Satz lautet daher in seiner allgemeinen Fassung:

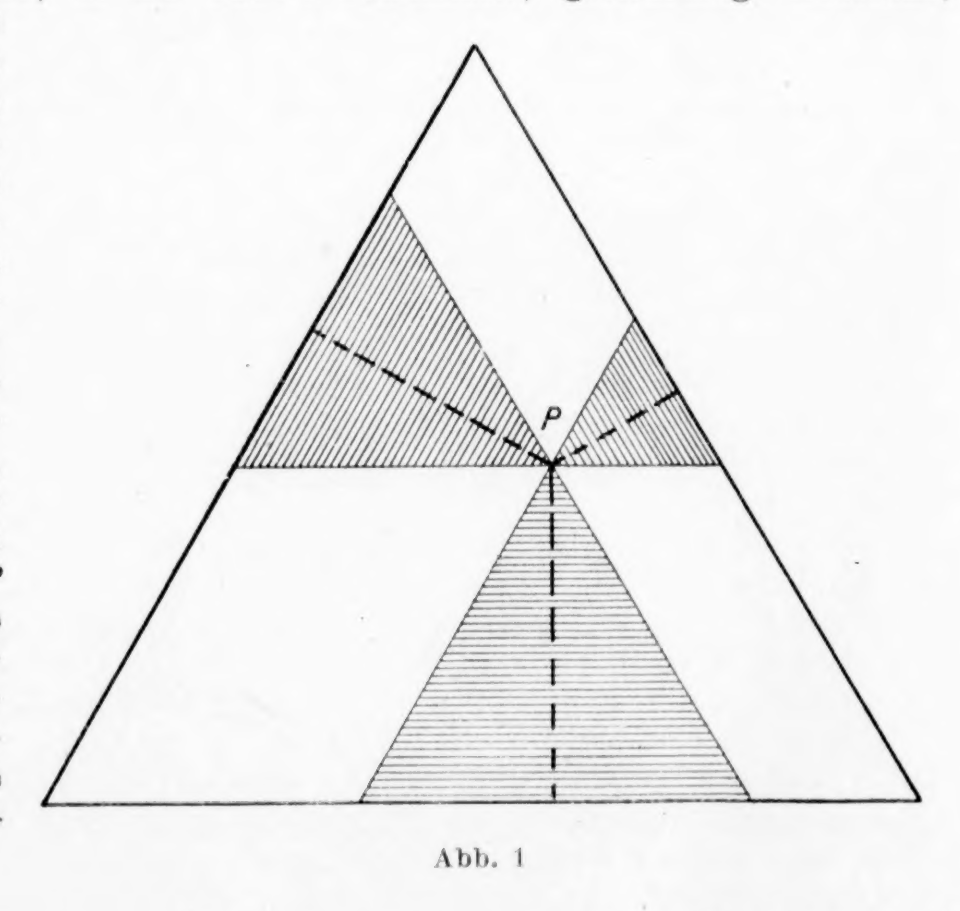


Abb. 1

[1] Die nachstehenden Ausführungen stützen sich auf den Abschnitt IV A 3 (Rechentafeln mit Dreieckbezugsystem) meiner Doktordissertation über Nomographie. Stuttgart 1921.

Fällen wir von einem beliebigen, in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkte auf die Dreieckseiten die Lote, so ist bei Berücksichtigung der Vorzeichen die Summe der Längen dieser Lote gleich der Höhe des Dreiecks[1]).

2. Dreieckrechentafeln mit regelmäßigem Netz. Ein einfaches Beispiel möge dartun, wie man mit Hilfe dieses Satzes ein anschauliches Bild der prozentuellen Zusammensetzung verschiedener Gemische derselben drei Substanzen A, B und C erhalten kann. Besteht dieses Gemisch aus:

$$u\,^0/_0 \text{ Substanz } A \qquad v\,^0/_0 \text{ Substanz } B \qquad w\,^0/_0 \text{ Substanz } C,$$

so ist: $u\,^0/_0 + v\,^0/_0 + w\,^0/_0 = 100\,^0/_0$.

Zeichnen wir nun ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe gleich 100 passend groß gewählten Längeneinheiten ist, so entspricht jedem Punkt des Dreiecksinnern ein mögliches Gemisch, das durch die in derselben Einheit gemessenen Abstände des Punktes von den Dreieckseiten definiert ist. Um diese Abstände nicht mit einem Maßstabe ausmessen zu müssen, empfiehlt es sich, die von der Firma Carl Schleicher und Schüll in Düren in den Handel gebrachten gedruckten Dreiecksnetze zu benutzen, an deren Rand die den einzelnen Geraden zukommenden Abstände u, v und w von den Seiten des Ausgangsdreiecks angeschrieben werden. In Abb. 2 ist als Beispiel nur der dem Gemisch

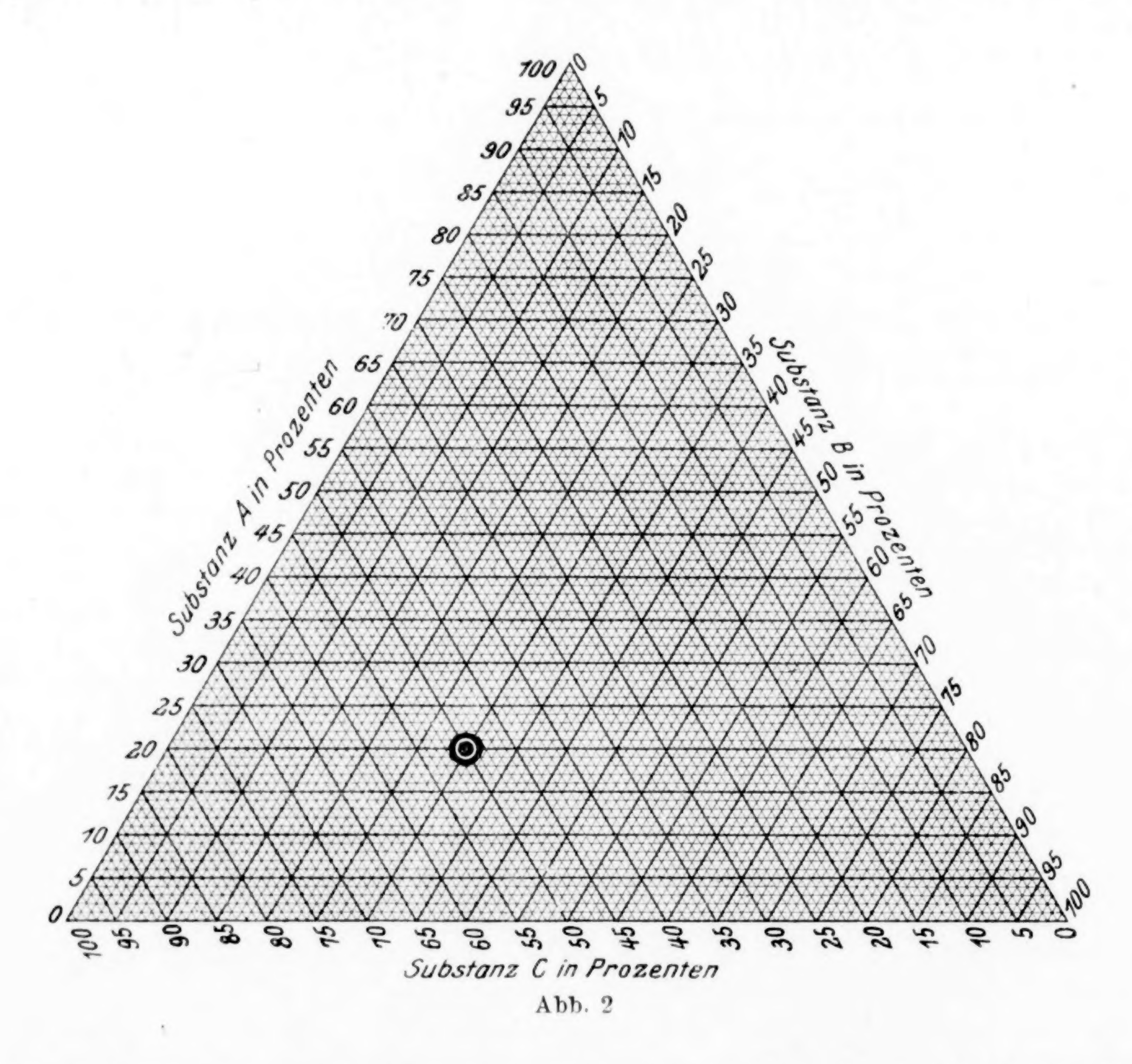


Abb. 2

$20\,^0/_0$ A-Substanz, $30\,^0/_0$ B-Substanz und $50\,^0/_0$ C-Substanz entsprechende Punkt in ein solches Netz eingetragen. (s. auch Prof. Dr. Grosse, Graphische Papiere und ihre vielseitige Verwendung, Düren 1917.)

Ausgehend von diesen, zumal von Chemikern verwendeten Dreiecksnetzen sollen hier an Hand verschiedener Beispiele allgemeinere Rechentafeln hergeleitet werden, die auch für weitere Kreise von Interesse sein dürften.

[1]) Ich verdanke obigen Beweis, der sich vor anderen durch seine große Anschaulichkeit auszeichnet, einer freundlichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. von Hammer.

Bei einer stationären Strömung vollkommener Flüssigkeit besteht zwischen der Höhenlage z über einer beliebigen wagerechten Ausgangsebene, dem Drucke p und der Geschwindigkeit v von Flüssigkeitsteilchen die als Bernoullische Gleichung bekannte Beziehung:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C,$$

worin die hydraulische Höhe C bei Potentialbewegung eine im ganzen Strömungsbereich, sonst eine nur längs einer bestimmten Stromlinie gleichbleibende Größe ist. Die drei Glieder der linken Seite stellen sämtlich Längenwerte dar und werden auch Höhe H, Druckhöhe D und Geschwindigkeitshöhe G genannt. Mit diesen Bezeichnungen lautet obige Gleichung:

$$H + D + G = C.$$

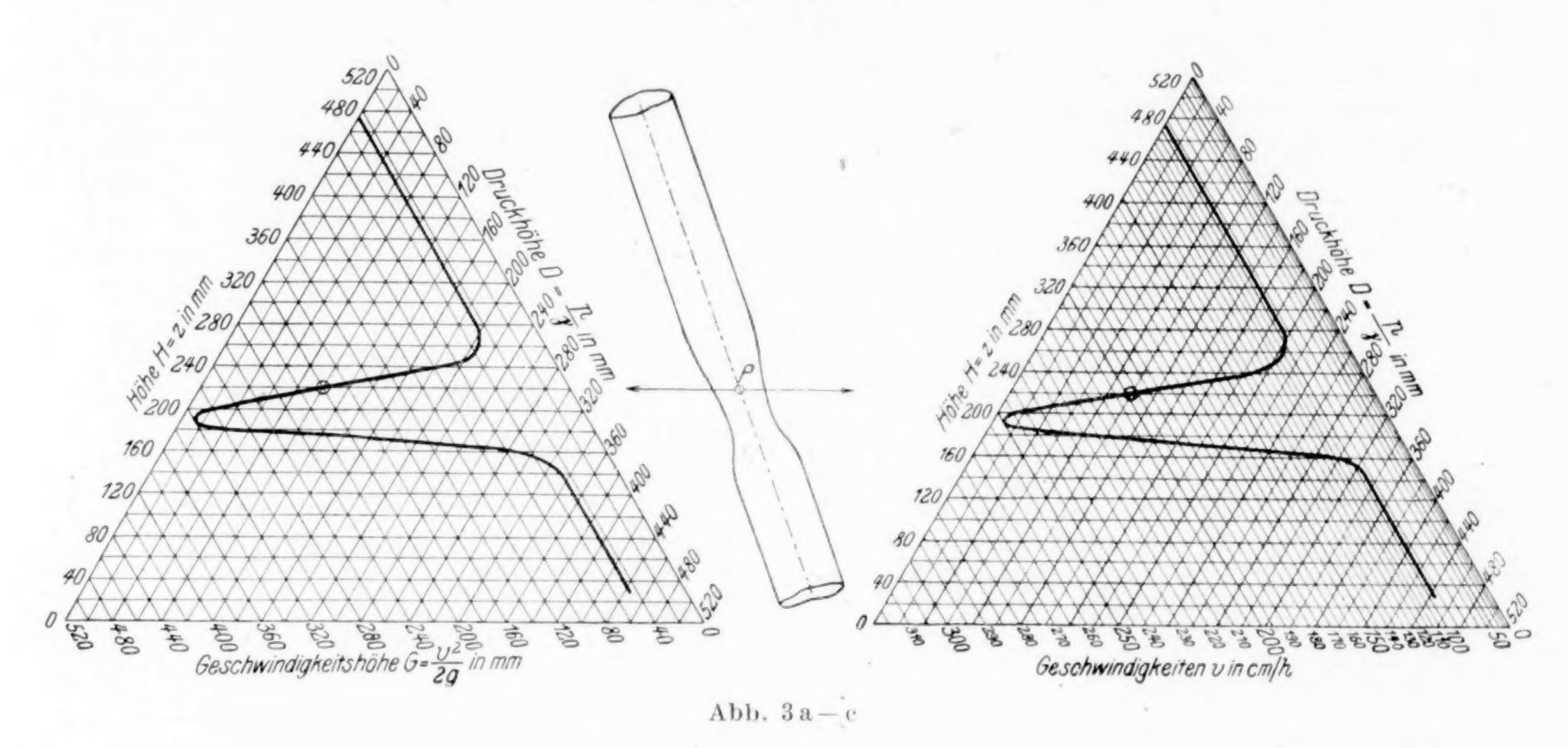


Abb. 3a—c

In Abb. 3a wurde die Rechentafel für diese Beziehung entworfen, dabei wurde $C = 520$ mm angenommen und die der Zahleneinheit entsprechende Längeneinheit in der Zeichnung zu 0,5 mm gewählt. In jedem Punkt der Tafel kann man somit eine bei einer hydraulischen Höhe von 520 mm mögliche Verteilung der kinetischen, potentiellen und Druckenergie ablesen.

3. Hydraulische Energieumwandlungskurve. Wir wollen nun annehmen, daß in dem in Abb. 3b dargestellten Rohrstück sich ein stationärer Strömungsvorgang abspiele, der durch die hydraulische Höhe $C = 520$ mm und die im nicht verengten Teil des Rohres herrschende Wassergeschwindigkeit $v = 0{,}75$ m/s charakterisiert ist. Zeichnen wir nun das betreffende Rohrstück und die entsprechende Dreieckstafel im gleichen Maßstab so nebeneinander, daß die mit $H = 0$ bezifferte Gerade in der Zeichnung des Rohres die bei der Berechnung der Konstanten C beliebig angenommene wagerechte Ausgangsebene darstellt, und sich in beiden Abbildungen natürlich »oben« und »unten« entspricht, so können wir dadurch, daß wir von einem beliebigen Punkte des Rohres wagerecht in die Rechentafel übergehen, daselbst alle in dem betr. Punkte möglichen Kombinationen von Druckhöhe und Geschwindigkeitshöhe ablesen. Ist die Druckhöhe an einer bestimmten Stelle etwa durch Manometerablesung bekannt, und tragen wir den dieser entsprechenden Punkt in der zukommenden Höhe in die Tafel ein, so können wir dieser die Geschwindigkeitshöhe entnehmen; ist aber, wie im vorliegenden Beispiel, die Geschwindigkeit und damit die Geschwindigkeitshöhe bekannt, so erhalten wir mit ihrer Hilfe denselben Tafelpunkt und können die entsprechende Druckhöhe ablesen. Bestimmen wir nun für hinreichend viele Punkte etwa der Rohrachse die entsprechenden Tafelpunkte und verbinden diese durch eine glatt verlaufende Linie, so gestattet diese nicht nur die Energieverteilung in jedem einzelnen Punkt der Rohrachse sofort der Tafel zu entnehmen, sondern sie gibt uns auch eine übersichtliche, zeichnerische Darstellung des Gesetzes,

nach dem sich die Umwandlung der Energie vollzieht, die ein sich längs der Achse bewegendes Massenteilchen besitzt. Ich habe daher diese Linie hydraulische »Energieumwandlungskurve« genannt.

4. Dreieckrechentafeln mit ungleichmäßigem Netz. In obigem Beispiele haben wir eine Dreieckrechentafel mit regelmäßigem Netz erhalten, die insbesondere bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten den Nachteil hat, daß wir der Tafel unmittelbar nur die Geschwindigkeits h ö h e n entnehmen können, aus denen wir alsdann die Geschwindigkeiten selbst errechnen müssen. Diesen Uebelstand könnten wir dadurch vermeiden, daß wir die einzelnen Netzgeraden anstatt mit den Werten der ihnen zukommenden Geschwindigkeitshöhen, mit denen der entsprechenden Geschwindigkeiten selbst beziffern, so daß wir letztere unmittelbar der Tafel entnehmen könnten. Eine solche Anordnung hat aber wieder den Nachteil, daß gleichen Abständen der Netzgeraden verschieden große Sprünge in den beigeschriebenen Geschwindigkeitswerten entsprechen, so daß beispielsweise im Intervall zwischen $G = 40$ mm ($v = 88{,}6$ cm/s) und $G = 60$ mm ($v = 108{,}5$ cm/s) eine Geschwindigkeitszunahme von 19,9 cm/s stattfindet, während im nächsten Intervall zwischen $G = 60$ mm und $G = 80$ mm ($v = 125{,}3$ cm/s) die Geschwindigkeit nur um 16,8 cm/s zunimmt. Wir können diesen Nachteil, der sich besonders beim Einschalten (Interpolieren) bemerkbar macht, dadurch vermeiden, daß wir ein ungleichmäßiges Netz in der Weise entwerfen, daß wir die Netzgeraden für Geschwindigkeitshöhen zeichnen, die runden in gleichmäßigen Abständen aufeinander folgenden Geschwindigkeitswerten zukommen, sie aber anstatt mit den Werten der Geschwindigkeitshöhen mit denen der entsprechenden Geschwindigkeiten beziffern. Dies ist in Abb. 3c geschehen, in der somit die Netzgeraden auf der Dreieckseite eine sogen. unregelmäßige Funktionsskala (Skala der Funktion $\frac{v^2}{2g}$) entwerfen. Während wir daher der Abb. 3a nur entnehmen können, daß beispielsweise dem Achsenpunkt P mit der Höhe $H = 220$ mm eine Druckhöhe $D = 100$ mm und eine Geschwindigkeitshöhe $G = 200$ mm entspricht, aus welch letzterer

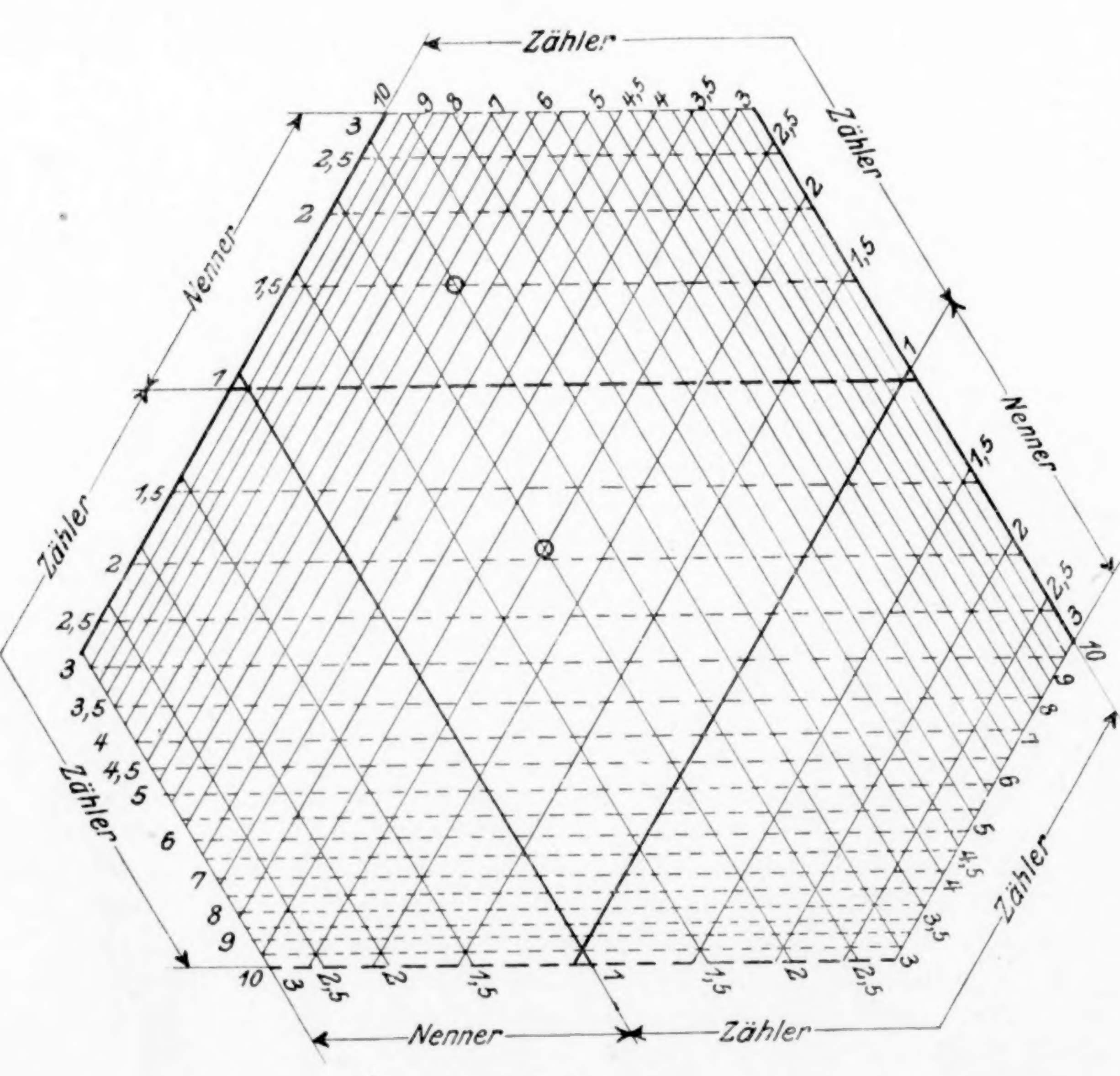


Abb. 4

die Geschwindigkeit erst errechnet werden muß, entnehmen wir der Tafel 3c außer denselben Werten für H und D unmittelbar die zugehörige Geschwindigkeit $v = 198$ cm/s. Um den Uebergang von der Abb. 3b zu den Rechentafeln, sowie das Entwerfen der letzteren zu erleichtern, zeichnet man zweckmäßigerweise alles auf Millimeterpapier.

Dreieckrechentafeln mit ungleichmäßigen Netzen gestatten die rasche Lösung von Gleichungen recht verwickelter Natur. Ich will in Abb. 4 nur noch das Schema einer verhältnismäßig einfachen von mir entworfenen Tafel vorführen, die gestattet, die Kombinationen dreier Zahlen zu finden, deren Produkt gleich einer vierten Zahl C ist. Zeichnen wir (s. Abb. 5a) ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe gleich dem mit einer beliebigen Einheit gemessenen $\log C$ ist, und lesen wir als Abstände eines Punktes P von den Dreieckseiten an einem logarithmischen Maßstab gleicher Einheit die Werte u, v und w ab, so besagt die Tafel, daß

$$\log u + \log v + \log w = \log C$$

und damit, daß $u\,v\,w = C$ ist. (Logarithmische Maßstäbe mit Einheiten von 25 cm und 12,5 cm stellen die Teilungen der meist gebräuchlichen Rechenschieber dar.) Da die Höhe des Dreiecks in Abb. 5a gleich log 10 ist, entspricht dem Punkte P die Ablesung:

$$2{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}25 = 10.$$

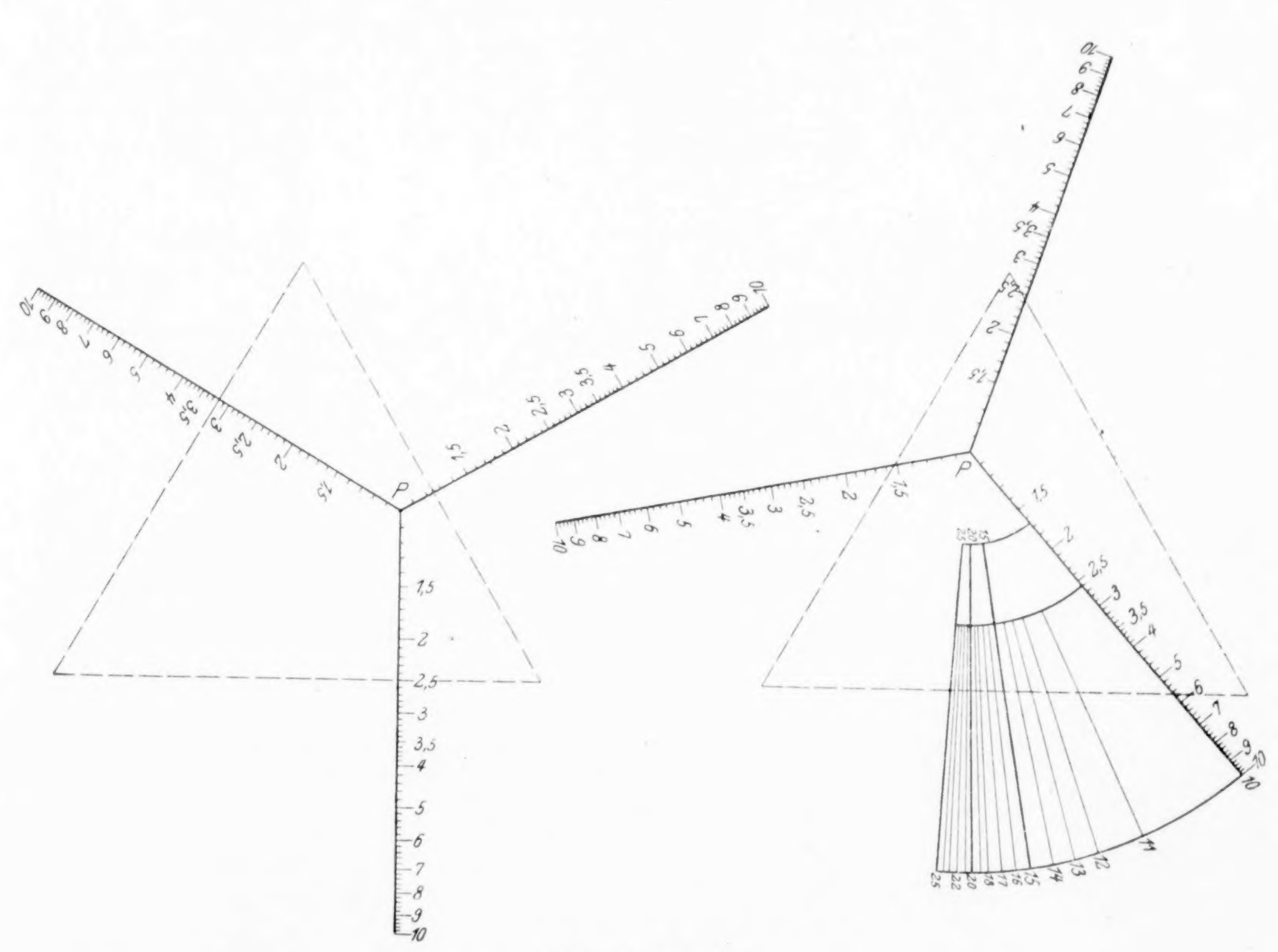


Abb. 5a und 5b

Um die Abstände nicht ausmessen zu müssen, kann man, wie in Abb. 4, wiederum die den Logarithmen von runden in gleichmäßigen Abständen aufeinander folgenden Werten entsprechenden Netzgeraden zeichnen und mit den ihnen zukommenden Numeris in ähnlicher Weise beziffern, wie dies bei den Teilungen des Rechenschiebers der Fall ist. Die Bezifferung dreier durch einen Punkt gehenden Netzgeraden gibt dann die drei Faktoren an, deren Produkt gleich dem Werte C ist, für den die Tafel gezeichnet wurde. So ist das in Abb. 4 dargestellte Schema für $C = 9{,}5$ entworfen, und der im Dreieckinnern gelegene Punkt besagt, daß: $2 \cdot 1{,}9 \cdot 2{,}5 = 9{,}5$. Da, wie in dem die geometrischen Grundlagen der Dreieckrechentafeln behandelnden ersten Abschnitt gezeigt, die Lote auch

das negative Vorzeichen haben dürfen, was bei obiger logarithmischer Darstellung besagt, daß die betreffende Zahl im Nenner eines Bruches vom Werte C steht, dessen Zähler gleich dem Produkt der beiden anderen Zahlen ist, so lesen wir an dem außerhalb des Ausgangsdreiecks gelegenen, durch einen Kreis hervorgehobenen Punkt der Abb. 4 ab, daß auch: $\frac{2,5 \cdot 5,7}{1,5} = 9,5$.

5. Dreieckrechentafeln mit beweglichem Netz. Um nun letztere Tafel nicht für jeden Wert C neu zeichnen zu müssen, behalten wir nur die in Abb. 4 mit durchlaufenden Strichen gezeichneten, zu zwei Seiten des Ausgangsdreiecks parallelen Netzgeraden bei und zeichnen die gestrichelten zur dritten Dreieckseite parallelen Netzgeraden auf durchsichtiges Papier. Wir brauchen alsdann nur die mit »1« bezifferte Gerade des Pauspapiers so auf die übrige Rechentafel zu legen, daß sie durch die Punkte der ausgezogenen beiden Seiten des Ausgangsdreiecks hindurchgeht, in denen diese von den mit dem jeweiligen »C« bezifferten Netzgeraden geschnitten werden.

6. Dreieckrechentafeln mit beweglicher Ableseskala. Anstatt das vollständige Dreiecksnetz zu entwerfen, kann es zuweilen vorteilhaft sein, nur das Ausgangsdreieck zu zeichnen und auf Pauspapier die drei von einem Punkt ausgehenden und je einen Winkel von 120^0 miteinander bildenden Funktionsmaßstäbe aufzutragen. Der Gebrauch dieser Vorrichtung ist aus Abb. 5a gleichfalls ersichtlich. Das Pauspapier wird so auf das — in Abb. 5a gestrichelt gezeichnete — Ausgangsdreieck gelegt, daß die Maßstäbe stets senkrecht zu den Dreieckseiten stehen, was sich bei Verwendung von Millimeterpapier leicht erreichen läßt. An den Stellen, an denen sich die Dreieckseiten und die Maßstäbe schneiden, werden zusammengehörige Werte der drei gesuchten Veränderlichen abgelesen, welche die der Rechentafel zugrunde liegende Gleichung erfüllen. (Beispiel: $2,5 \cdot 3,2 \cdot 1,25 = 10$.)

Stehen im letzteren Falle die Maßstäbe nicht auf den Dreieckseiten senkrecht, sondern sind sie gegen diese normale Stellung um α^0 gedreht (s. Abb. 5b), so ist die Höhe des Dreiecks gleich der mit $\cos \alpha$ multiplizierten Summe der durch die Dreieckseiten auf den Maßstäben abgeschnittenen Strecken, oder die Summe dieser Strecken ist gleich der durch $\cos \alpha$ dividierten Dreieckshöhe. Wir können daher unter Beibehaltung desselben Ausgangsdreiecks Gleichungen mit verschiedenen Konstanten »C« auflösen, wenn wir nur dem Blatt mit den Maßstäben die für das jeweilige »C« notwendige Drehung gegenüber der normalen Lage erteilen. Am besten zeichnet man für die notwendigen oder für runde aufeinander folgende Werte von »C« die Strahlen auf das Pauspapier auf, die bei richtiger Lage der Maßstäbe auf einer der Dreieckseiten senkrecht stehen müssen. Letztere Lage wird leicht erhalten, wenn man das Ausgangsdreieck wiederum auf Millimeterpapier entwirft. So entspricht z. B. die Abb. 5b, deren Höhe gleich log 10 ist, durchaus der Abb. 5a, wenn wir den Maßstäben die zu den Dreieckseiten senkrechte Lage geben. Drehen wir aber das Pauspapier mit den Maßstäben so, daß der mit 11 oder 12 oder 13 .... oder 25 bezeichnete Strahl auf einer der Dreieckseiten senkrecht steht, so beträgt das Produkt der an den Maßstäben abzulesenden Größen der drei gesuchten Faktoren nicht mehr 10, sondern je nachdem 11 oder 12 oder 13 .... oder 25. In dem Beispiele der Abb. 5b steht der mit 21 bezifferte Strahl auf der Dreieckseite senkrecht. Die Ablesung besagt daher, daß $5,67 \cdot 1,53 \cdot 2,42 = 21$ ist.

7. Schluß. Es sei noch erwähnt, daß sich unter anderem auch Gleichungen von der in der Praxis öfters wiederkehrenden Form:

$$[f(X)]^p \, [g(Y)]^q \, [h(Z)]^r = C,$$

in der $f(X)$, $g(Y)$ und $h(Z)$ beliebige, in den betrachteten Intervallen stetige Funktionen der drei Veränderlichen X, Y, Z und p, q, r beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Hochzahlen sind, nach erfolgtem Logarithmieren leicht durch Dreieckrechentafeln darstellen lassen, doch müssen sich alsdann, wie sich leicht einsehen läßt, die den verschiedenen logarithmischen Teilungen zugrunde liegenden Längeneinheiten zueinander und zu der Einheit, mit der die Dreieckshöhe aufgetragen ist, verhalten wie $p : q : r : 1$.

Die hier wiedergegebenen Rechentafeln sollen nur schematische Beispiele darstellen. Für die Praxis bestimmte Rechentafeln entwerfe man nicht zu klein und erhöhe ihre Uebersichtlichkeit durch Verwendung verschieden starker Striche und durch Benutzung von Tuschen verschiedener Farbe. 183

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung.[1])

Von A. NÁDAI in Göttingen.

Die ebene elastische Platte und die dünne, nach einer Umdrehungsfläche gekrümmte elastische Schale sind Konstruktionselemente, die dem Ingenieur in einer Fülle der verschiedenartigsten Fälle hinsichtlich ihrer Randbefestigung und ihrer Belastung in den Anwendungen entgegentreten. Ueber ihre Formänderungen und über die in ihrem Innern wirkenden Spannungen scheint man in der Praxis nur in einer geringen Zahl von Fällen näher unterrichtet zu sein. Man beherrscht ihre Spannungszustände selbst in der Auswahl der der Rechnung gut zugänglichen Fälle nicht in dem Maß, wie die anderer Elemente des Maschinenbaues und der Statik der Baukonstruktionen.

Die vor einem Menschenalter in Angriff genommenen und seither in zahlreichen Veröffentlichungen bekannt gewordenen Arbeiten von C. v. Bach haben diese Lücke durch Näherungsmethoden zu überbrücken versucht und die Verhältnisse auf Grund einer großen Reihe verdienstvoller Versuche geklärt[2]).

Zu einer genaueren Untersuchung der Formänderungen und der Festigkeit der nach Rotationsflächen gekrümmten, auf Biegung beanspruchten Schalen hat die Entwicklung des Großdampfturbinenbaus besonders angeregt. Der Wunsch, die Maschinenleistung der Dampfturbine zu steigern, hat es mit sich gebracht, daß man im Hinblick auf die Betriebsfähigkeit der in den letzten Jahren zu gewaltigen Einheiten angewachsenen Turbinen gezwungen ist, ihrer konstruktiven Durchbildung die weitestgehende Sorgfalt zuzuwenden. So ist beispielsweise die genaue Innehaltung des engen Spielraumes zwischen den Teilen der Leitvorrichtungen oder den Zwischenwänden, welche die einzelnen Druckstufen voneinander trennen und den rasch umlaufenden Radscheiben für die Betriebssicherheit erforderlich. Diese kann gefährdet werden durch die Biegungsschwingungen der rotierenden Scheiben oder die nicht richtig abgeschätzten Verbiegungen der einem seitlichen Druck ausgesetzten Zwischenwände, welche die Ursache zum Streifen der Scheiben an den feststehenden Teilen bilden können. Wir möchten in diesem Zusammenhange an die Schilderung der auf derartige und ähnliche Mängel zurückgeführten, gänzlichen Zerstörung zweier Einheiten von 35000 und einer schweren Beschädigung einer Turbine von 25000 kW in A. Stodolas eben in fünfter Auflage erschienenen »Dampf- und Gasturbinen«[3]) erinnern. Die Förderung der Elastizitätsprobleme der gewölbten Schalen ist im wesentlichen den grundlegenden Arbeiten von A. E. H. Love, E. Meißner, H. Reißner und A. Stodola zu verdanken.

Die Fragen des Eisenbetonbaues mögen andererseits dazu beigetragen haben, daß sich die Ingenieure neuerdings um die praktische Ausgestaltung der Theorie der Biegung ebener Platten bemühen. Die Verhältnisse in den Anwendungen liegen zwar sowohl bei den gewölbten, als auch bei den ebenen Platten zum Teil verwickelter, als man sie in den Ansätzen, die zurzeit ihren Festigkeitsberechnungen zugrunde gelegt werden können, zu berücksichtigen pflegt. Dies dürfte aber weniger an einer Unvollkommenheit der analytischen Hilfsmittel oder der allgemeinen Grundlagen liegen, auf die sich ihre Theorien stützen, als einem Mangel an zuverlässigen Experimenten zuzuschreiben sein, von denen — wenn sie auf die Voraussetzungen der Theorie hinreichend Rücksicht nehmen — die Ergänzung der vorhandenen Lücken in den experimentellen Grundlagen erhofft werden kann.

---

[1]) Erweiterte Wiedergabe des Vortrages auf der Naturforscherversammlung in Leipzig am 21. September 1922.

[2]) Man findet eine Zusammenstellung der unter Leitung von C. von Bach in der Materialprüfungsanstalt, Stuttgart, vorgenommenen Versuche in dem Anhang zu seinen beiden Vorträgen »Das Ingenieurlaboratorium und die Materialprüfungsanstalt der T. Hochsch. Stuttgart«, Konrad Wittwer, Stuttgart 1915.

[3]) A. Stodola, Die Dampf- und Gasturbinen, Berlin 1922, S. 790.

Aber auch die Theorie der Biegung elastisch-isotroper Platten scheint, obwohl ihre mathematischen Grundlagen seit einem Jahrhundert entwickelt und ihre physikalischen durch die zahlreichen Experimente bestätigt sind, welche die Biegungslehre der elastisch-isotropen Stäbe stützen (die mathematische Theorie hätte im vorigen Jahre auf ihr hundertjähriges Bestehen zurückblicken können, wenn ihre Entstehung vom Veröffentlichungsjahr der ersten der Differentialgleichung $\Delta\Delta w = f(x, y)$ gewidmeten Arbeit gezählt wird), von den Ingenieuren noch nicht als das Hilfsmittel anerkannt zu sein, das in erster Linie berufen sein müßte, ihnen in allen Festigkeitsaufgaben über ebene biegungsfeste Wandungen zur Hand zu sein. Ich muß es mir versagen, hier rückblickend näher auf die verschiedenen Gründe einzugehen, die nach meiner Meinung zu dieser Entwicklung den Anlaß gegeben haben. Der Umstand aber, daß es ein universelles Rechnungsverfahren bisher nicht gibt, mit dessen Hilfe die hierher gehörigen Randwertprobleme sich mit einem geringen Maß von Rechenarbeit numerisch lösen ließen, sollte von seiten der Praktiker, wie dies häufiger geschehen ist, nicht als Grund dafür angeführt werden, daß sich der Ingenieur mit unzulänglicher begründeten Hilfsmitteln begnügen muß. Ich glaube, daß ein Fortschritt bereits dadurch zustande kommt, daß man in den Anwendungen von den verschiedenen Verfahren, die sich im Laufe der Zeit entwickelt haben, nicht das gleiche und nicht zu viel verlangt, sondern sich der Grenzen zwischen den verschiedenen Arten der Randwertprobleme stärker bewußt wird. Von diesem Standpunkt aus gesehen und mit Rücksicht auf den Fragenkreis, dessen Beantwortung die Festigkeitsprobleme des Ingenieurs verlangen, lassen sich vielleicht drei Gruppen von Plattenproblemen unterscheiden.

Zu den ersten rechne ich die analytisch gelösten Randwertaufgaben der elastischen Platte, die wir den Klassikern der Elastizitätstheorie bis vielleicht einschließlich St. Venant, M. Lévy, Love und Michell zu verdanken haben, ferner die mit analytischen Mitteln noch lösbar erscheinenden. Ich glaube, daß die Möglichkeit der Erschließung neuer Lösungen mit analytischen Mitteln und neuer, für die Anwendungen brauchbarerer Formen für die alten noch nicht erschöpft ist. Ich habe hier die durch einfache Kurven begrenzten Platten mit einfachen Grenzbedingungen im Sinne, ferner die Formänderungs- und Spannungszustände rechteckiger oder unbegrenzter Platten mit den Symmetrieeigenschaften der doppelt-periodischen Funktionen, die Lösungen, die durch Ueberlagerung der aus Singularitäten entspringenden Teillösungen aufgebaut werden können. So selbstverständlich dies für den Ingenieur ist, es scheint in vielen ausgezeichneten neueren Arbeiten nicht beachtet worden zu sein, daß mit der Angabe der Form der elastischen Fläche nur ein Teil der praktischen Aufgabe erledigt ist, für die Anwendungen haben mit Ausnahme der sogleich zu erwähnenden Aufgaben ihre zweiten und dritten Differentialquotienten das größere Interesse, und Lösungen, mit deren Hilfe sich die Spannungen nicht berechnen lassen, verlieren an Wert.

Die zweite Gruppe bilden die Eigenwertprobleme elastischer Platten, die Aufgaben der Bestimmung der kritischen Drucke oder Lasten, unter denen ihr Gleichgewicht labil wird, oder die der Frequenzen schwingender Platten. Mit Ausnahme einiger weniger Beispiele liegen die Probleme meist so, daß man bisher nicht in der Lage war, ihre Lösungen aus den Differentialgleichungen ableiten zu können. Bei gewissen Knickungsaufgaben, nämlich den der genau in ihrer Ebene gedrückten Platten, ist übrigens die Form der unendlich wenig ausgebogenen Platte insofern Nebensache, als sie sich in derselben nicht mehr im stabilen Gleichgewichte befindet; nach den Spannungen wird also hier nicht gefragt werden können, alles was zu ermitteln bleibt, ist nur der kleinste kritische Druck. Hier liegt das Anwendungsgebiet des Ansatzes von G. H. Bryan und der Verfahren von W. Ritz, Lord Rayleigh und S. Timoschenko. Nach Beschränkung der Funktionsformen auf eine willkürlich ausgewählte Klasse, die man nach Möglichkeit den Grenzbedingungen anzupassen versucht, wird statt eines dem Biegungsproblem der Platte zugeordneten Variationsproblems mittels der Ansatzfunktionen ein gewöhnliches Maximum-Minimumproblem gelöst.

Zur dritten Gruppe von Plattenaufgaben wären schließlich alle die zu zählen, deren Lösungen weder auf dem analytischen Wege, durch Entwicklung nach Orthogonalfunktionen oder Singularitätenreihen, noch aus einem Variationsprinzip mit Hilfe der genannten Verfahren ohne größeren Aufwand an Rechenarbeit zu beschaffen sind. Erwähnt seien die Aufgaben über die Biegung von Platten mit Rändern, auf denen gemischte Grenzbedingungen, statischer und kinematischer Art vorgeschrieben sind, schwierigere, polygonale Konturen, schließlich die für den Dampfturbinen- und den Eisen-

betonbau gleich wichtigen Fälle der Biegung von Platten veränderlicher Stärke. Sie dürften wohl das Hauptanwendungsgebiet für die Rechnung mit kleinen Differenzen bilden, deren erfolgreiche Anwendbarkeit auf die Probleme der Plattenstatik und der Schalen der vorzeitig verstorbene Schweizer Ingenieur Huldreich Keller, ferner H. Hencky, H. Marcus, Nielsen und H. M. Westergaard gezeigt haben.

1. Freiaufliegender Plattenstreifen. Indem ich zu einigen Sonderproblemen der Plattenstatik übergehe, möchte ich auf einige Beispiele der Anwendung verschiedener Hilfsmittel kurz hinweisen. Einer der einfachsten Grenzfälle der Biegungszustände einer rechteckigen Platte ist der eines freiaufliegenden Plattenstreifens. Die Randbedingungen: w (die Durchbiegung) $= 0$, $\Delta w = 0$ auf den Seiten $x = 0$ und $x = a$ werden durch die entlang der x-Achse bis zu den dritten Ableitungen stetig aneinander stoßenden elastischen Flächen

$$w_n = a_n\left(1 + \frac{n\pi y}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} \quad y \geqq 0, \qquad w_n = a_n\left(1 - \frac{n\pi y}{a}\right) e^{\frac{n\pi y}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} \quad y \leqq 0, n = 1, 2, 3 \ldots \quad (1)$$

erfüllt. Eine solche, der Differentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$ genügende Lösung stellt offenbar einen Plattenstreifen dar, der auf der x-Achse eine nach einer Sinuslinie verteilte Last trägt. Durch Ueberlagerung solcher Lösungen mit $n = 1, 2, 3 \ldots$ ergibt sich also die Plattenfläche für eine willkürliche Verteilung der Belastung, und in der Grenze auch für eine Einzelkraft P, die in einem Punkte $x = \xi$, $y = 0$ wirkt:

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 N} \sum_n \frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{n^3} \left(1 + \frac{n\pi y}{a}\right) \sin\frac{n\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, y \geqq 0) \quad . \quad . \quad (2)$$

(N bedeutet den Plattenmodul $= Eh^3/12\,(1 - \nu^2)$, E die Elastizitätsziffer, ν die Poissonsche Zahl, h die Dicke der Platte). Berechnet man von w die zweiten Ableitungen, so findet man sie in der Form

$$2N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varphi - y\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad 2N\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varphi + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad 2N\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = y\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad . \quad . \quad (3),$$

sofern mit φ die Funktion

$$\varphi = N\Delta w = -\frac{P}{2\pi} \sum_n \frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{n} \sin\frac{n\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bezeichnet wird. Nachdem die Biegungsmomente von diesen 3 Ableitungen linear abhängen, ist der Spannungszustand durch die Potentialfunktion φ und ihr Gefälle gegeben. Es kommt uns nur noch darauf an, die Funktion φ anzugeben. Das ist offenbar eine elementare Aufgabe aus der Lehre der ebenen Potentialströmungen, oder der winkeltreuen Abbildungen. Wir haben das Geschwindigkeitspotential φ und seine Ableitungen oder die Geschwindigkeitskomponenten u und v einer Strömung anzugeben, die aus einer Reihe von in regelmäßigen Abständen nach Art der Abb. 1 auf einer Geraden angeordneten Quellen entspringt und in den symmetrisch gelegenen Punkten versickert. Es gehören zusammen komplexe Strömungsfunktion $Z(z) = Z(x + iy)$ und das Potential φ:

Abb. 1

$$Z = \varphi + i\psi = \frac{P}{2\pi} \ln \frac{\sin\frac{\pi(z-\xi)}{2a}}{\sin\frac{\pi(z+\xi)}{2a}} \quad . \quad (5), \qquad \varphi = \frac{P}{4\pi} \ln \frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi y}{a} - \cos\frac{\pi(x-\xi)}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi y}{a} - \cos\frac{\pi(x+\xi)}{a}} \quad (6),$$

und ihr Hodograph oder Geschwindigkeitsbild liefert die Gefällskomponenten

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{P}{4a}\left[\frac{\sin\frac{\pi(x+\xi)}{a}}{\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}} - \frac{\sin\frac{\pi(x-\xi)}{a}}{\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}}\right] \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{P\,\mathfrak{Sin}\frac{\pi y}{a}}{4a}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a} - \mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{a}}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Will man nicht die expliziten Ausdrücke für φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ zur Berechnung der Spannungsmomente des Plattenstreifens

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{Biegungsmomente} \quad \begin{aligned} m_x &= -\frac{1+\nu}{2}\varphi + \frac{(1-\nu)\,y}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ m_y &= -\frac{1+\nu}{2}\varphi - \frac{(1-\nu)\,y}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \\ &\textbf{Drillungsmoment} \quad m_{xy} = \qquad - \frac{(1-\nu)\,y}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

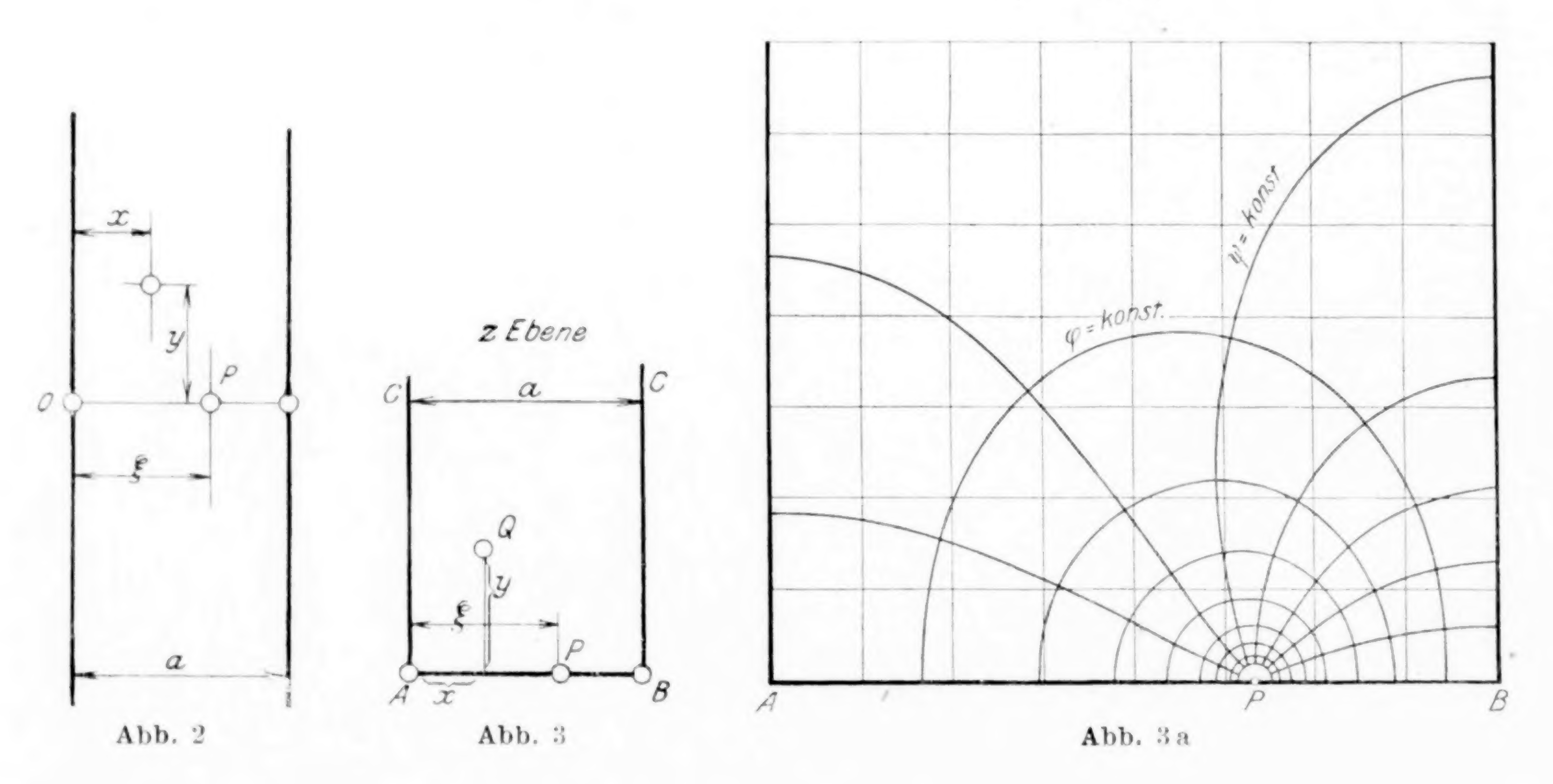


Abb. 2 Abb. 3 Abb. 3 a

verwenden, so kann man sie sich aus zwei winkeltreuen Abbildungen verschaffen. Die Ordinaten der Fläche φ und der zu φ konjugierten

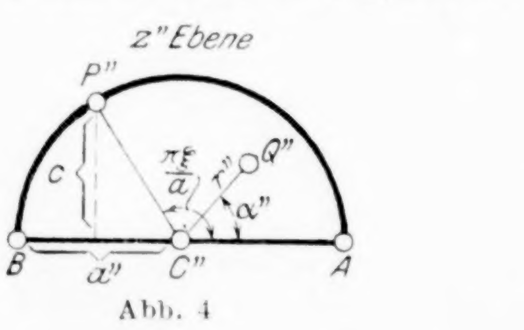


Abb. 4

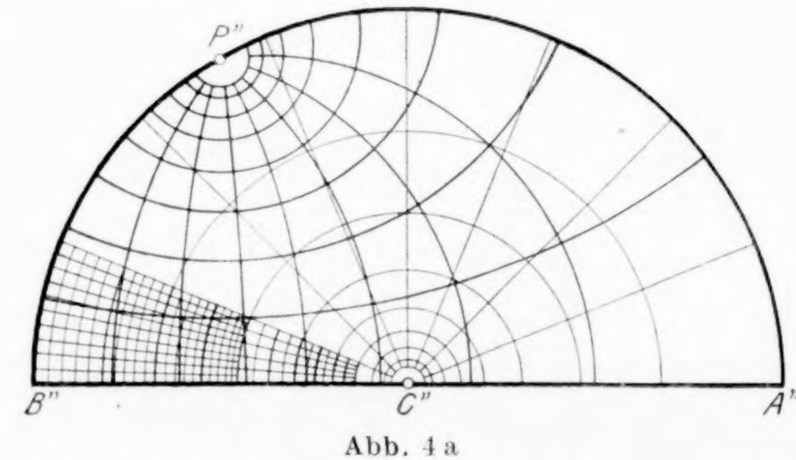


Abb. 4 a

Potentialfunktion ψ in einem Punkte x, y des Parallelstreifens Abb. 2 können aus der winkeltreuen Abbildung des Halbstreifens $x > 0$ (Abb. 3 und 3 a) auf einen Halbkreis (Abb. 4 und 4 a) vom Halbmesser a'' entnommen werden. Den Kurven $\varphi =$ konst. und $\psi =$ konst. entsprechen in letzteren die orthogonalen Kreise

$$(x'' - c \operatorname{cotg} \nu)^2 + y''^2 = \frac{c^2}{\sin^2 \nu}, \qquad x''^2 + (y'' - c\, \mathfrak{Cotg}\, \mu)^2 = \frac{c^2}{\mathfrak{Sin}^2 \mu} \quad . \quad . \quad (10),$$

wenn man

$$\mu = -\frac{2\pi\varphi}{P} = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots \infty, \quad \nu = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi\psi}{P} = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots 2\pi, \quad c = a'' \sin\frac{\pi\xi}{a} \quad (11)$$

setzt. Der Wert von φ (und von ψ) im Punkte x, y (Abb. 3) wird in seinem Bildpunkt r'', α'' innerhalb des Halbkreises (Abb. 4 a) gemäß

$$\frac{\pi x}{a} = \alpha'', \quad \frac{\pi y}{a} = \ln\frac{r''}{a''} \quad \dots \dots \dots (12)$$

entnommen.

Die Abbildung für den Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten u, v ist in großen Zügen leicht angebbar. Es genügt wieder die Hälfte $y > 0$ des Parallelstreifens zu betrachten. In ihr ist die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit v überall positiv. Auf den drei Geraden des oberen Halbstreifens CA, AB, BC hat sie den Wert Null. Weiter ist u auf CA und AP negativ, auf dem übrigen Teil der Berandung CB und PB positiv. Der zweimal um einen rechten Winkel gebrochene Linienzug der drei Geraden CA, AB, BC bildet sich also auf die

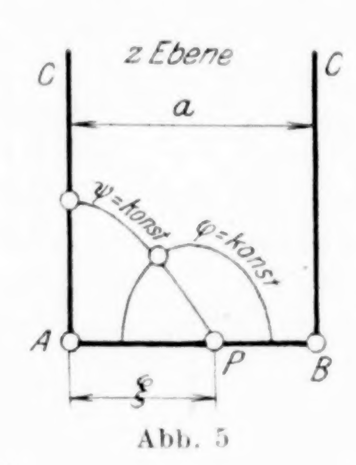


Abb. 5

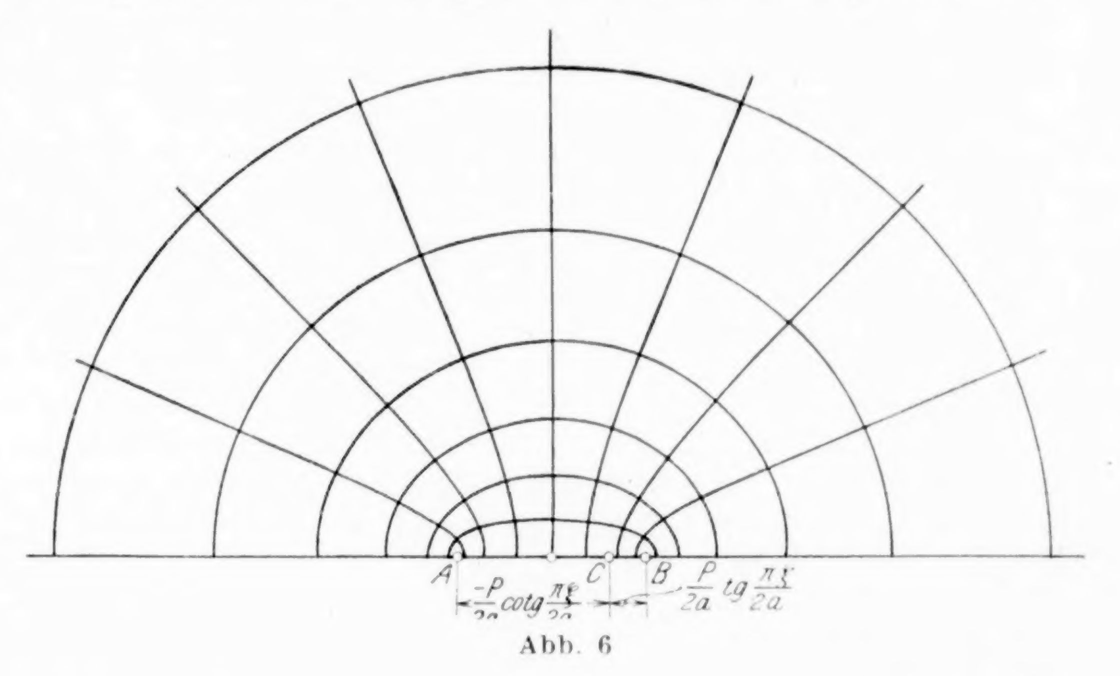


Abb. 6

u-Achse und der von ihnen begrenzte Halbstreifen auf die obere u, v-Halbebene ab. Dem Quellpunkt entspricht dabei der unendlich ferne Punkt und dem unendlich fernen Punkt in der x, y-Ebene der Anfangspunkt C (Abb. 6) in der u, v-Ebene. Die Elimination der Veränderlichen z aus den Gl. (5) und (7) führt zu dem einfachen Ergebnis, daß den Niveau- und den Stromkurven des Parallelstreifens Abb. 3a das System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln (Abb. 6)

$$\frac{(u+u_0)^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1, \quad \frac{(u+u_0)^2}{A'^2} - \frac{v^2}{B'^2} = 1 \quad \dots \dots \dots (13)$$

mit den Halbachsen

$$A = C \operatorname{Cof} \mu, \ B = C \operatorname{Sin} \mu, \ A' = C \sin\nu, \ B' = C\cos\nu \quad \dots \dots (14)$$

entspricht, wo zur Abkürzung

$$u_0 = -C\cos\frac{\pi\xi}{a}, \quad C = \frac{P}{2a\sin\frac{\pi\xi}{a}} \quad \dots \dots \dots (15)$$

stehen. Auf der Symmetrieachse $y = 0$, welche den Angriffspunkt $x = \xi$ der Last P enthält, sind die Spannungsmomente gleich

$$m_x = m_y = -\frac{(1+\nu)\varphi}{2} = \frac{(1+\nu)P}{8\pi}\ln\frac{1-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{a}}{1-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{a}}, \ m_{xy} = 0 \quad \dots (16).$$

In der Nähe der Angriffsstelle der Last ist der Verlauf der Spannungsmomente in einem freiaufliegenden Plattenstreifen bis auf eine gleichmäßige Biegungsbeanspruchung $m_x = 0$, $m_y = -\frac{(1-\nu)P}{4\pi}$, $m_{xy} = 0$ derselbe, wie in einer freiaufliegenden kreisförmigen Platte, die man aus dem Streifen mit einem Halbmesser $\frac{2a}{\pi}\sin\frac{\pi\xi}{a}$ herausschneidet.

Mit Hilfe der Lösung für den Parallelstreifen dürften sich die Spannungen in einem beliebigen Punkt einer rechteckigen Platte, die von einer über sie wandernden Last herrühren, unter der Voraussetzung verfolgen lassen, daß auf den Seiten des Rechtecks die Grenzbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ erfüllt sind. Das rechteckige Belastungsgitter dieses Spannungszustandes stellt man sich nämlich durch die Ueberlagerung neuer Reihenlasten im Parallelstreifen dar. Es zeigt sich bei näherem Zusehen, daß man mit wenigen Reihen auskommt, sofern man sie senkrecht zu der kürzeren Seite im Rechteck annimmt.

2. Kreisplatte in Einzelpunkten gelagert. Als Gegenstück der auf ihrem Rande in stetiger Weise unterstützten Platte sei ein Biegungsfall einer in diskreten Punkten gelagerten Platte betrachtet. Ein typisches Beispiel, das eine allgemeine Analyse des Spannungszustandes zuläßt, bietet die unter einer Seitenlast ausgebogene und in einzelnen Randpunkten unterstützte kreisförmige Platte. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß sie entweder durch einen gleichförmig verteilten Druck oder durch eine Einzellast in ihrer Mitte belastet sei. Die Stützpunkte am Umfang des Kreises $r = a$ mögen die Zentriwinkel $\varphi = \gamma_1, \dots \gamma_k$ haben, die in ihnen übertragenen Stützreaktionen seien $P_1, \dots P_k$. Die Bedingung der freien Aufstützung verlangt das Verschwinden der Randmomente (Biegungsmomente) m_r und der Randscherkräfte q_r

$$m_r = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right) = 0\,, \qquad q_r = -N\frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{\partial m_{rt}}{r\,\partial \varphi} = 0 \text{ für } r = a \qquad (17)$$

mit der Maßgabe, daß letztere Bedingung mit Ausnahme der Umgebung der Stützpunkte $r = a$, $\varphi = \gamma_1, \dots \gamma_k$ zu gelten habe. Das über den Randkreis genommene Integral der Scherkräfte q_r muß nämlich in der Umgebung eines jeden Stützpunktes um den Betrag der in ihm übertragenen Stützreaktion zunehmen. Im Ausdruck (17) der in einem Zylinderschnitt übertragenen Scherkraft bedeutet m_{rt} das in demselben wirkende Torsionsmoment, dessen in der Umfangsrichtung genommene Ableitung die Ersatzscherkraft.

Die zweite Randbedingung wird für eine konzentrierte Stützkraft P_i, welche im Punkte $r = a$, $\varphi = \gamma_i$ übertragen wird, durch die divergente Reihe von Fejér[1]

$$q_r = -\frac{P_i}{\pi a}\left({}^1\!/_2 + \sum_1 \cos n\varphi_i\right) \qquad \varphi_i = \varphi - \gamma_i \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (18)$$

ausgedrückt. Bezeichnen wir mit P ohne Zeiger die Gesamtlast, welche die Platte aufzunehmen hat und setzen wir die Stützreaktionen gleich

$$P_i = \lambda_i P \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (19),$$

so verlangt das Gleichgewicht der Kräfte auf dem Kreis $r = a$

$$\Sigma \lambda_i \cos \gamma_i = 0, \quad \Sigma \lambda_i \sin \gamma_i = 0, \quad \Sigma \lambda_i = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (20).$$

Der Ausdruck für k konzentrierte Randkräfte $P_1, \dots P_k$, die in den Punkten $r = a$, $\varphi = \gamma_1 \dots \gamma_k$ angreifen, ist

$$q_r = -\frac{P}{\pi a}\left[{}^1\!/_2 \sum_1^k \lambda_i + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos n\varphi_i\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (21)$$

und der von k konzentrierten Kräften, die im Gleichgewicht mit der gleichmäßig über den Umfang des Randkreises $r = a$ verteilten Ringbelastung $P = \Sigma P_i$ stehen

$$q_r = -\frac{P}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos n\varphi_i \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (22).$$

Die elastische Fläche w'' kann aus zwei Anteilen w' und w,

$$w'' = w' + w \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (23),$$

zusammengesetzt werden. w' soll die verbogene Fläche der auf ihrem Umfang gleichmäßig aufliegenden Kreisplatte bedeuten, also eine der Flächen

$$\left.\begin{aligned} w' &= \frac{P}{64\pi N}\left[\frac{(5+\nu)a^2 - 2(3+\nu)r^2}{1+\nu} + \frac{r^4}{a^4}\right] \text{ (gleichförmiger Druck)} \\ w' &= \frac{N}{8\pi N}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2 - r^2) - r^2 \ln\frac{a}{r}\right] \text{ (Einzelkraft in der Mitte)} \end{aligned}\right\} \; . \qquad (24).$$

Dann rührt der zweite Anteil w von einem System von transversalen Kräften her, das lediglich auf dem Umfang des Kreises $r = a$ verteilt ist. Es ist identisch mit dem Gleichgewichtssystem (22). Die Grenzbedingungen für w lauten somit

$$r = a \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{\partial w}{r\,\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = 0 \quad q_r = -N\frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{\partial m_{rt}}{r\,\partial \varphi} = -\frac{P}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos n\varphi_i \quad (25).$$

[1] s. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 455 und 457.

Das ist eine Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta \Delta w = 0$, der bekanntlich durch eine Fouriersche Reihe

$$w = a_0 + b_0 \varrho^2 + a_1 \varrho \cos \varphi + c_1 \varrho \sin \varphi + b_1 \varrho^3 \cos \varphi + d_1 \varrho^3 \sin \varphi \\ + \sum_2 (\alpha_n \varrho^n + b_n \varrho^{n+2}) \cos n \varphi + \sum_2 (c_n \varrho^n + d_n \varrho^{n+2}) \sin n \varphi \quad . \quad . \quad (26)$$

genügt werden kann. Es empfiehlt sich, sie in ebensoviel Teillösungen zu zerlegen, als Stützpunkte vorhanden sind. Die Durchführung dieses von Hrn. Prof. L. **Prandtl** stammenden Vorschlages führt zur elastischen Fläche

$$w_i^* = -\lambda_i \sum_2 (\alpha_n \varrho^n + \beta \varrho^{n+2}) \cos n \varphi_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

einer nach Abb. 7 durch eine konzentrierte Randkraft belasteten kreisförmigen Platte. Die Kraft P_i hält mit einem gleichförmigen vermehrt um ein nach einer Cosinuslinie verteiltes System von Randscherkräften das Gleichgewicht. In Gl. (27) ist $\varrho = \frac{r}{a}$, φ_i bedeutet den Winkel $\varphi - \gamma_i$, der vom Angriffspunkt von P_i zu rechnen ist, α_n und β_n sind

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \frac{1}{n}\right) \frac{Q}{(n-1)\,n}, \quad \beta_n = -\frac{Q}{(n+1)\,n}, \quad Q = \frac{P a^2}{2\pi(3+\nu) N} \quad . \quad (28).$$

Diese elastische Fläche besitzt die Spannungsmomente

$$\left.\begin{aligned} &\text{Biegungs-}\\&\text{momente}\end{aligned}\right\{ \begin{aligned} m_r &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1-\varrho^2)\sum \varrho^{n-2}\cos n\varphi + 2(1+\nu)(1-\varrho^2)\sum \frac{\varrho^{n-2}}{n}\cos n\varphi\right] \\ m_t &= \frac{-P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1-\varrho^2)\sum \varrho^{n-2}\cos n\varphi + 2(1+\nu)(1+\varrho^2)\sum \frac{\varrho^{n-2}}{n}\cos n\varphi\right] \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Drillungs-}\\&\text{moment}\end{aligned}\right\} m_{rt} = \frac{-P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1-\varrho^2)\sum \varrho^{n-2}\sin n\varphi + 2(1+\nu)\sum \frac{\varrho^{n-2}}{n}\sin n\varphi\right] \quad (29).$$

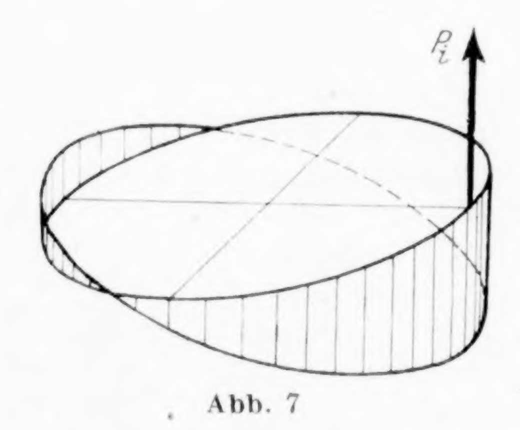


Abb. 7

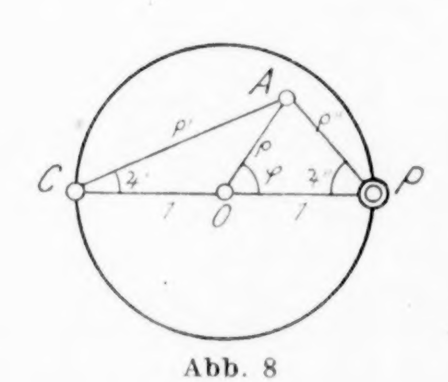


Abb. 8

Wir konnten hier den überflüssig gewordenen Zeiger i bei φ_i fortlassen. Die in den Ausdrücken vorkommenden Summen sind für $0 < \varphi < 2\pi$ der reelle, bezw. der imaginäre Teil der nachfolgenden Reihen

$$\sum_2 \varrho^{n-2} e^{n i \varphi} = \frac{1}{\varrho^2} \sum_2 \zeta^n = \frac{\zeta^2}{\varrho^2 (1-\zeta^2)} = \frac{e^{i(2\varphi - \psi'')}}{\varrho''}$$

$$\sum_2 \frac{\varrho^{n-2}}{n} e^{n i \varphi} = \frac{1}{\varrho^2} \sum_2 \frac{\zeta^n}{n} = -\frac{1}{\varrho^2}[\zeta + \ln(1-\zeta)] = -\frac{e^{i\varphi}}{\varrho} - \frac{\ln \varrho'' - i\psi''}{\varrho^2} \quad (30)$$

der komplexen Veränderlichen

$$\zeta = \varrho e^{i\varphi}, \; \zeta' = \varrho' e^{i\varphi'} = 1 + \zeta, \; \zeta'' = \varrho'' e^{i\varphi''} = 1 - \zeta \; (i = \sqrt{-1}), \; \psi' = \varphi', \; \psi'' = 2\pi - \varphi'' \quad (31).$$

Die Bedeutung der Strecken $\varrho\, \varrho'\, \varrho''$ und der Winkel $\varphi\, \varphi'\, \varphi''\, \psi'\, \psi''$ ist aus der Abb. 8 zu ersehen. P ist die Stelle der konzentrierten Stützkraft. Außer P wirken auf dem Kreis $\varrho = 1$ eine gleichförmig verteilte Ringlast $= P$ und die nach der Cosinuslinie verteilten Randscherkräfte. Die Spannungsmomente sind auf der Geraden $\varphi = 0$ (OP), bezw. $\varphi = \pi$ (OC) (das obere Zeichen gilt für $\varphi = 0$, das untere für $\varphi = \pi$)

$$\left.\begin{aligned} m_r &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)(1 \pm \varrho) - 2(1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}(\varrho \pm \ln(1 \mp \varrho))\right] \\ m_t &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[-(1-\nu)(1 \pm \varrho) + 2(1+\nu)\frac{1+\varrho^2}{\varrho^2}(\varrho \pm \ln(1 \mp \varrho))\right], \; m_{rt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (32),$$

auf der Geraden $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} m_r &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[-(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}-(1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right] \\ m_t &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}+(1+\nu)\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}\ln(1+\varrho^2)\right] \\ m_{rt} &= \frac{P_i}{2\pi(3+\nu)}\left[(1-\nu)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}+2(1+\nu)\frac{\operatorname{arctg}\varrho-\varrho}{\varrho^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (33),$$

schließlich auf dem Umfang des Kreises $\varrho = 1$,

$$m_r = 0,\ m_t = \frac{2(1+\nu)P_i}{\pi(3+\nu)}\left[\cos\varphi + \ln 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right],\ m_{rt} = \frac{(1+\nu)P_i}{\pi(3+\nu)}\left[\sin\varphi - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right] \quad . \quad (34).$$

Wenn die kreisförmige Platte in zwei oder in mehr Punkten unterstützt ist, sind ebensoviel Lösungen w_i^* (Gl. (27)), als Stützpunkte vorhanden sind, anzusetzen. Jede ist mit der Stärke der Auflagerkraft zu nehmen. Bei drei Stützpunkten reichen die Gl. (20) zur Angabe der Reaktionen aus, in den statisch unbestimmten Fällen mit mehr als drei Stützpunkten entsprechen jedem Wertsystem der λ_i, das den 3 Gl. (20) genügt, mögliche Deformationszustände. Die noch fehlenden Bestimmungsgleichungen liefern die Angaben über die Verschiebungen der Stützpunkte.

Wenn die Platte in den Endpunkten eines Durchmessers unterstützt ist, ist ihre Durchbiegung
$$w'' = w' + w_I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$
unter w' eine der Flächen (24) verstanden und wo $(n = 2, 4, 6, \ldots)$

$$w_0 = 0{,}065\,\frac{Pa^2}{N},\quad w_I = w_0 - \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\sum_2\left[\frac{1}{(n-1)n}+\frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\,\frac{1}{(n-1)n^2}-\frac{\varrho^2}{n(n+1)}\right]\varrho^n\cos n\varphi \quad (36).$$

Für drei symmetrisch gelegene Auflagerpunkte, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, ist $(n = 3, 6, 9, \ldots)$

$$w_I = w_0 - \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)N}\sum\left\{\frac{1}{(n-1)n}+\frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\,\frac{1}{(n-1)n^2}-\frac{\varrho^2}{n(n+1)}\right\}\varrho^n\cos n\varphi,\quad w_0 = 0{,}0153\,\frac{Pa^2}{N} \quad (37).$$

Wenn der Kreis in den Ecken eines eingeschriebenen Rechtecks aufruht, haben zwei Stützpunkte, die auf einer Diagonalen ruhen, die nämliche Stützkraft aufzunehmen. Die elastische Fläche ist hier die Summe von w' Gl. (24) und von zwei Biegungszuständen w_I und w_{II} der Gl. (36), die mit der Stärke der Stützreaktionen P_I, bezw. P_{II} zu nehmen sind. Nimmt man $P_I = P_{II} = P^*$ an, so wird durch $w^* = w_I + w_{II}$ die Deformation einer Kreisscheibe unter einer Ringlast beschrieben, die durch vier gleich große Auflagerkräfte P^* abgefangen wird; setzt man hingegen $P_I = P^{**}$, $P_{II} = P^{**}$, so hebt sich die Ringlast fort, und es verbleibt die Torsionsbeanspruchung einer Kreisscheibe durch vier gleiche Randeinzelkräfte P^{**}.

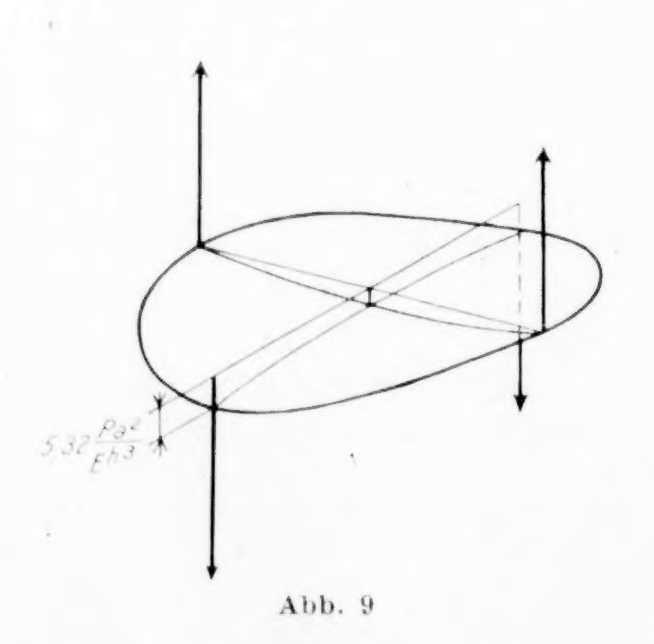


Abb. 9

Spannungsmomente einer in 2 Punkten unterstützten Kreisplatte unter einer auf den Umfang verteilten Ringlast.

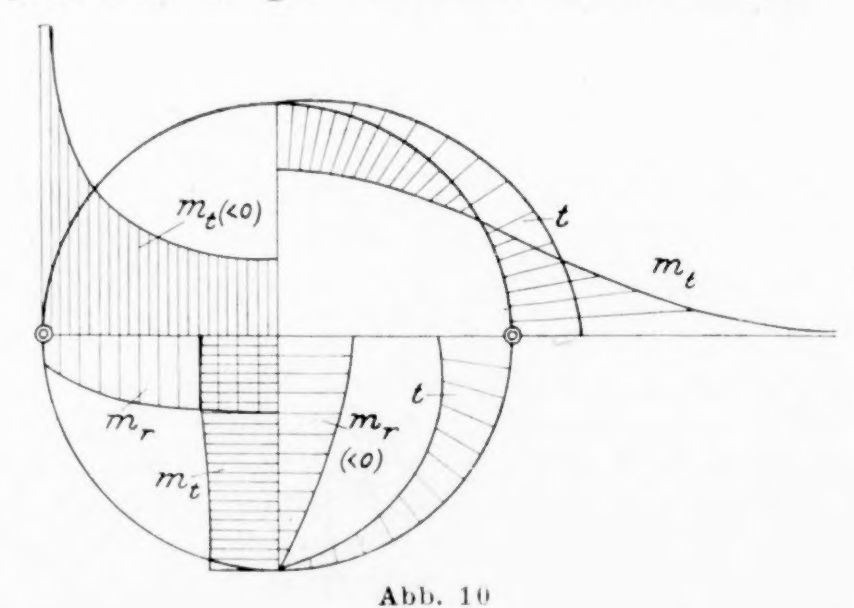


Abb. 10

3. Endliche Durchbiegungen. Die Erweiterung der Theorie der Plattenbiegung auf die Formänderungszustände von elastischen Platten, deren Durchbiegungen nicht mehr klein im Verhältnis zu ihrer Dicke sind, leitet in das Gebiet nichtlinearer Differentialgleichungen über. So führt die Aufgabe einer durch einen

gleichförmigen Druck belasteten kreisförmigen Platte großer Ausbiegung auf das simultane System von Gleichungen

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\Psi)\right) = -\Phi\frac{d\Phi}{du} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\Phi^2}{u} \quad (38), \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\Phi)\right) = \Phi s_r' + \frac{1}{u}\int_0^u p^* u\,du \quad (39).$$

Als abhängige Veränderliche werden hier die zur Radialverschiebung ϱ eines Punktes der Mittelfläche und die zur Neigung φ ihres Meridianschnittes proportionalen Größen Ψ und Φ, als unabhängige Veränderliche $u = \frac{r}{a}$, das Verhältnis des Abstandes r vom Mittelpunkt zum Halbmesser a benutzt. Die in der zweiten Gleichung enthaltene Größe s_r' ist der Radialspannung der Mittelfläche σ_r', p^* dem auf der Platte lastenden Druck p proportional. Hat man Φ und Ψ, so liefern die vier Differentialausdrücke

$$\left.\begin{aligned} s_r' &= \frac{d\Psi}{du} + \frac{\Phi^2}{2} + \nu\frac{\Psi}{u} \\ s_t' &= \nu\left(\frac{d\Psi}{du} + \frac{\Phi^2}{2}\right) + \frac{\Psi}{u} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (40) \qquad \left.\begin{aligned} s_r'' &= -\sqrt{3}\left(\frac{d\Phi}{du} + \nu\frac{\Phi}{u}\right) \\ s_t'' &= -\sqrt{3}\left(\nu\frac{d\Phi}{du} + \frac{\Phi}{u}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (41)$$

den Spannungsverlauf. Den Uebergang von den Größen s zu den spezifischen Spannungen σ vermittelt

$$\sigma = \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)a^2}\, s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

σ_r', σ_t' sind die Spannungen in der Mittelfläche und σ_r'', σ_t'' die Spannungen, die in der Oberflächenschicht $z = \frac{h}{2}$ der Platte zu σ_r', σ_t' hinzuzufügen sind. Φ und Ψ sind mit der Neigung des Meridianschnittes φ und mit der Radialverschiebung ϱ durch

$$\Phi = 2\sqrt{3}\,\frac{a}{h}\,\varphi, \quad \Psi = \frac{12 a^2}{h^2}\,\frac{\varrho}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

verbunden. Die Durchbiegung w ist das Integral von Φ

$$w = \frac{h}{2\sqrt{3}}\int \Phi\,du + \text{konst.} \quad (44) \qquad \text{und} \qquad p^* = 24\sqrt{3}(1-\nu^2)\frac{p\,a^4}{E h^4} \quad (45).$$

Den wichtigsten Anknüpfungspunkt für die Möglichkeit einer Integration oder der Auffindung von Näherungslösungen bietet die Linearität der linken Seiten der Gl. (38), (39) und der Umstand, daß jede linke Seite nur von der einen Funktion abhängt. K. Federhofer[1]) hat dieses System von Gleichungen in angenäherter Weise integriert, indem er für die Radialspannung s_r' und für Φ zwei einfache Funktionen ansetzte. Die 2. Gleichung wird, wenn man in ihr s_r' als bekannt ansieht, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die Federhofer nach dem Vorgang von Ritz durch eine ihr äquivalente Variationsaufgabe ersetzt, die er zur Bestimmung der Beiwerte heranzieht.

Nun lassen sich Lösungspaare Φ und Ψ angeben, welche den beiden Gleichungen und vorgeschriebenen Grenzbedingungen streng genügen, wenn man die Belastungsfunktion oder Fläche p^* als eine unbekannte und zu bestimmende Funktion der unabhängigen Veränderlichen u betrachtet. Die Lösungen des Plattenproblems für unendlich kleine Durchbiegungen bieten einen willkommenen Anhaltspunkt, wie die Ausdrücke für Φ zu wählen sind. Der Vorgang soll am Beispiel der eingespannten Platte mit einem in radialer Richtung unnachgiebigen Rand erläutert werden. Zu der angenommenen Funktion

$$\Phi = c\,(u - u^n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

läßt sich aus der Gleichung (38) nach ihrer Einführung auf der rechten Seite und Integration eine Funktion

$$\Psi = c_1 u + \frac{c_2}{u} - \frac{c^2}{2}\left\{\frac{(3-\nu)u^3}{8} - \frac{2(n+2-\nu)u^{n+2}}{(n+3)(n+1)} + \frac{(2n+1-\nu)u^{2n+1}}{(2n+2)2n}\right\} \quad . \quad (47)$$

angeben, welche ihr genügt. Für eine Platte ohne Bohrung ist $c_2 = 0$ zu setzen, c_1 bestimmt sich aus der Randbedingung $u = 1$, $\Psi = 0$ zu

$$c_1 = \frac{c^2}{8}\left[\frac{3-\nu}{2} - \frac{8(n+2-\nu)}{(n+3)(n+1)} + \frac{2n+1-\nu}{(n+1)n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

[1]) Ueber die Berechnung der dünnen Kreisplatte mit großer Ausbiegung. Der Eisenbau. 9. Jahrg., S. 152. 1918.

Den Spannungszustand bestimmen die vier Funktionen

$$s_r' = (1+\nu)\,c_1 - (1-\nu^2)\frac{c^2}{8}\left[\frac{u^2}{2} - \frac{8\,u^{n+1}}{(n+3)(n+1)} + \frac{u^{2n}}{(n+1)\,n}\right] \quad s_t' = \frac{d}{du}(u\,s_r') \qquad (49)$$

$$s_r'' = -\sqrt{3}\,c\,[1+\nu-(n+\nu)u^{n-1}], \qquad s_t'' = -\sqrt{3}\,c\,[1+\nu-(n\nu+1)u^{n-1}] \quad (50)$$

und die Belastungsfunktion, für die Φ und Ψ Lösungen des in Frage stehenden Plattenproblems sind, ist $\frac{1}{u}\int_0^u p^* u\,du = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\,\Phi)\right) - \Phi\,s_r' = F(u)$

$$p^* = \frac{1}{u}\frac{d}{du}(u\,F(u)) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51).$$

Durch Variation der Konstanten c und des Exponenten n bietet sich die Möglichkeit, die p^*-Kurve abzuändern und innerhalb einer für den vorliegenden Zweck hinreichenden Genauigkeit mit ihr die gleichförmige Druckverteilung $p^* =$ konst. anzunähern. Die Abweichungen der Ordinaten der Belastungsfunktion p^* von ihrer mittleren Ordinate $\bar{p}^*$ lassen eine Fehlerschätzung zu. Wenn man n festhält und den Beiwert c negativ werden läßt, nimmt das Integral der Fehlerquadrate $\int_0^1 [p^* - \bar{p}^*]^2 du$ mit den wachsenden Absolutwerten von c zuerst zu, erreicht ein relatives Maximum, nimmt wieder bis zu einem relativen Minimum ab, um dann schließlich monoton anzuwachsen. Der Vergleich der größten Schwankung mit dem Mittelwert $\bar{p}^* = \int_0^1 p^* du$ zeigt, daß es praktisch zulässig ist, die aus dem relativen Minimum bestimmte Belastungskurve statt ihres Mittelwertes zu benutzen. Wir haben uns damit begnügt, statt des Integrals die Summe der Fehlerquadrate in den sechs Punkten $u = 0$, $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$, 1 des Intervalls der Veränderlichen u zu einem Minimum zu machen. Man hat dazu c aus einer Gleichung $A c^4 + B c^2 + C = 0$ zu ermitteln, dem einen Wurzelpaar entspricht das relative Maximum, dem andern das relative Minimum. Daß sich für den Beiwert c keine eindeutige Bestimmung ergibt, braucht hier nicht als störend empfunden zu werden, die zu irgend einem willkürlich angenommenen oder bestimmten Wert von c aufgetragene Belastungskurve p^* zeigt an, mit was für einem Belastungszustand man es zu tun hat.

Belastungsflächen eingespannter Kreisplatten ($n = 5$).

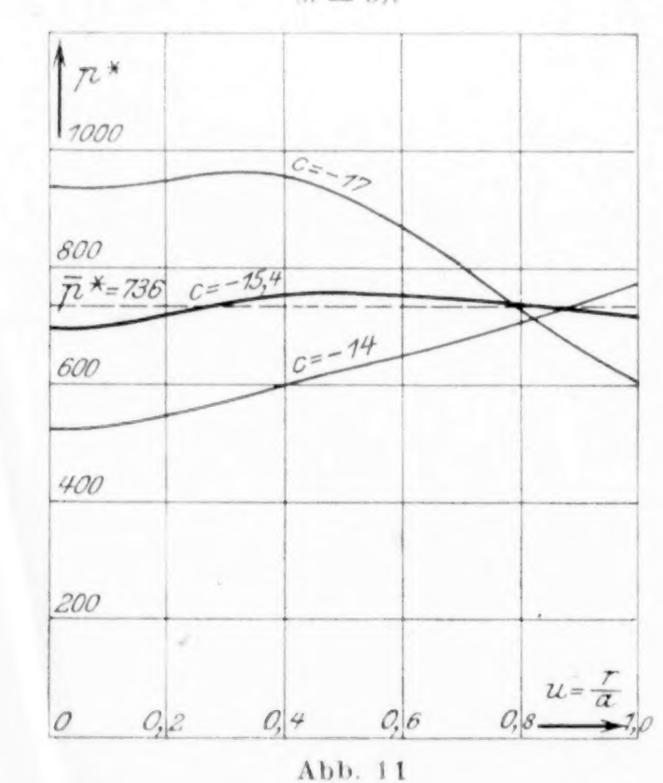


Abb. 11

In der Abb. 11 sind drei mit der Poissonschen Zahl $\nu = {}^1/_4$ zum Exponenten $n = 5$ ermittelte Druckkurven gezeichnet (mit $c = -14$, $-15{,}4$ und -17). Der zugehörige Ansatz

$$\Phi = c\,(u - u^5) \quad . \; . \; . \quad (52)$$

ergab

$$s_r' = \frac{c^2}{256}(73 - 15\,u^2 + 5\,u^6 - u^{10}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

und die Belastungsfläche

$$p^* = -96\,c\,u^2 + \frac{c^3}{8}\left[\frac{73}{48} - \frac{15}{8}u^2 - \frac{73}{16}u^4 + 5\,u^6 - \frac{9}{4}u^{10} + \frac{u^{14}}{2}\right] \quad . \; . \quad (54).$$

Sie verläuft außer für $c = 0$ zu ihrer mittleren Ordinate

$$\bar{p}^* = -32\,c - 0{,}0658\,c^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

am nächsten, wenn c gleich $c = -15{,}4$ ist.

Die mittlere Ordinate ist dann gleich $\bar{p}^* = 736$, welcher Zahl ein Druck $\frac{p\,a^4}{E\,h^4} = 18{,}9$ entspricht. Aus (52) folgt die elastische Fläche

$$w = \frac{h}{2\sqrt{3}}\int \Phi\,du + c_0 = \frac{h\,c}{4\sqrt{3}}\left(u - \frac{u^6}{3}\right) + c_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

oder wegen der Grenzbedingungen $u = 1$, $w = 0$,

$$c_0 = -\frac{hc}{6\sqrt{3}}$$

$$w = -\frac{hc}{12\sqrt{3}}(2 - 3u + u^6)$$
$$= 0{,}75\,(2 - 3u + u^6)h \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

mit einem Biegungspfeil der Platte $f = -\frac{hc}{6\sqrt{3}} = 1{,}49\,h$, der anderthalbmal so groß wie ihre Dicke ist.

Zur Fehlerabschätzung an Hand der Belastungsfunktion darf bemerkt werden, daß hier auf einen sehr nahen Anschluß an ihren gegebenen Verlauf mit einem so einfachen Ansatz nicht gerechnet werden kann; man überzeugt sich an Hand einfacher Beispiele aus der Plattenstatik, daß man ihn innerhalb eng gezogener Grenzen nicht zu verlangen braucht, wenn man die Beiwerte aus einem Minimalprinzip bestimmt. Die Biegungsspannungen und die Streckspannungen der Mittelfläche

$$\left.\begin{aligned} s_r' &= \frac{c^2}{256}\left[\frac{73}{3} - 15\,u^2 + 5\,u^6 - u^{10}\right] \\ s_t' &= \frac{c^2}{256}\left[\frac{73}{3} - 45\,u^2 + 35\,u^6 - 11\,u^{10}\right] \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

$$s_r'' = \frac{\sqrt{3}\,c}{4}\left[5 - 21\,u^4\right], \quad s_t'' = \frac{\sqrt{3}\,c}{4}\left[5 - 9\,u^4\right] \quad (59)$$

sind aus der Abb. 12 zu ersehen.

Spannungsverteilung einer eingespannten Kreisplatte ($n = 5$, $f = 1{,}49$ h).

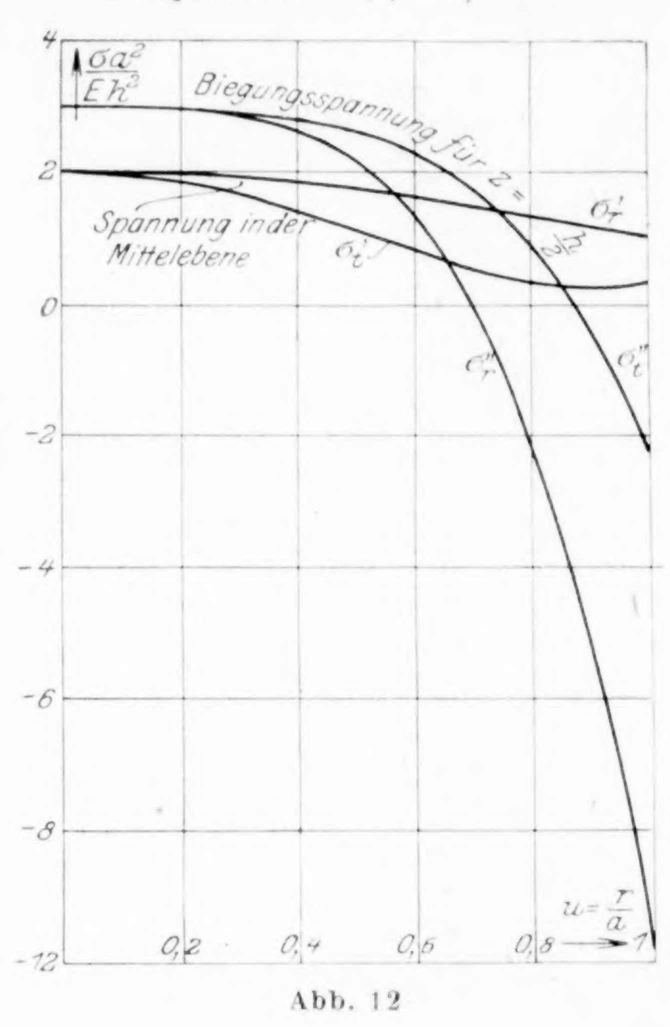


Abb. 12

Wir haben die Rechnung für $n = 4$ und $n = 7$ ebenfalls durchgeführt, die Abb. 13 und 14 geben in den Abweichungen der zugehörigen Belastungskurven von ihrem Mittelwert eine Vorstellung von der erzielten Genauigkeit. Die Abb. 15 und 16 zeigen den Verlauf des Druckes und der spez. Spannungen mit zunehmendem Biegungspfeil; die schrägen Geraden entsprechen der Theorie für unendlich kleine Durchbiegungen. Der

Belastungsflächen eingespannter Kreisplatten ($n = 4$).

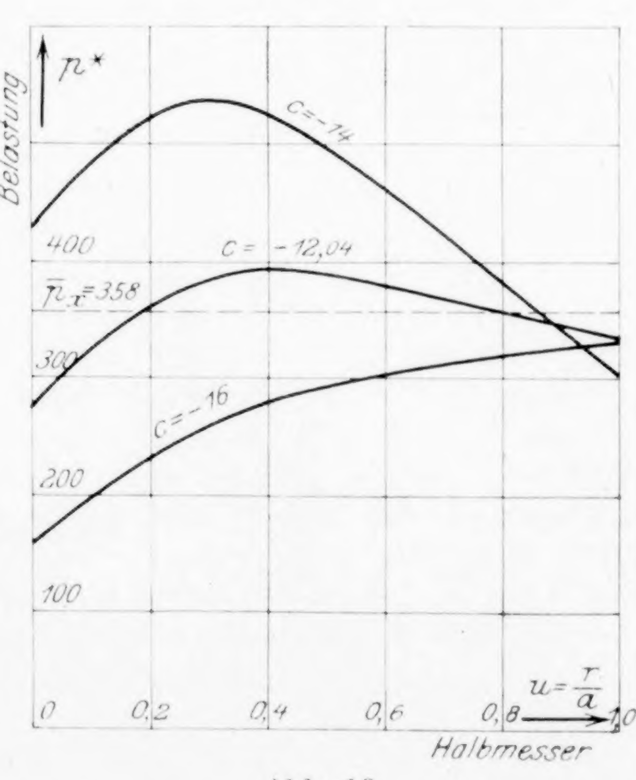


Abb. 13

Belastungsflächen eingespannter Kreisplatten ($n = 7$).

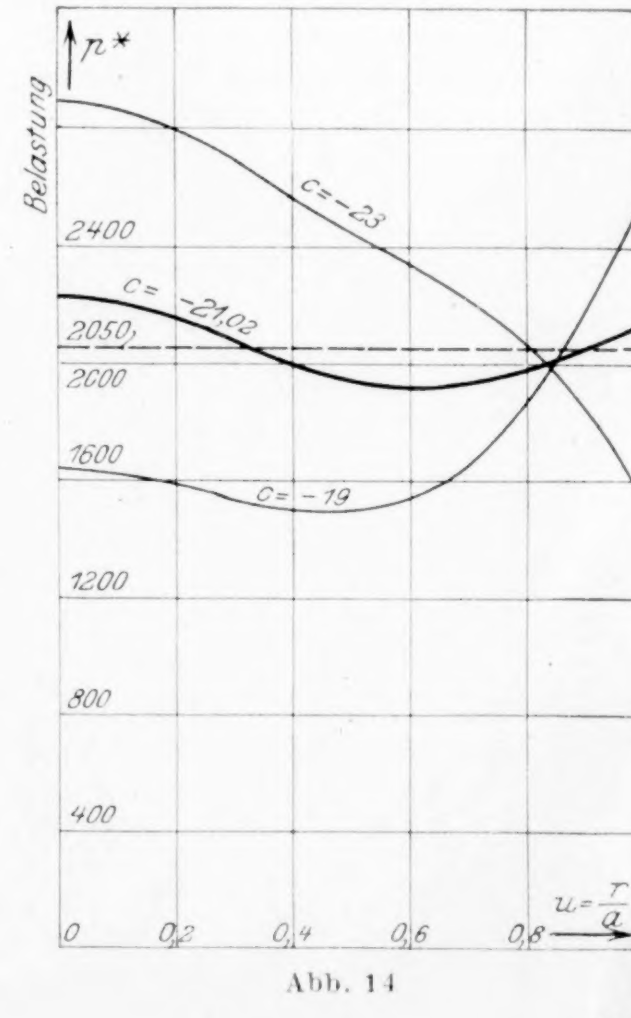


Abb. 14

Eingespannte Kreisplatte großer Ausbiegung.

Belastung. Spannung in der Mitte ($u=0$) und auf dem Rande ($u=1$).

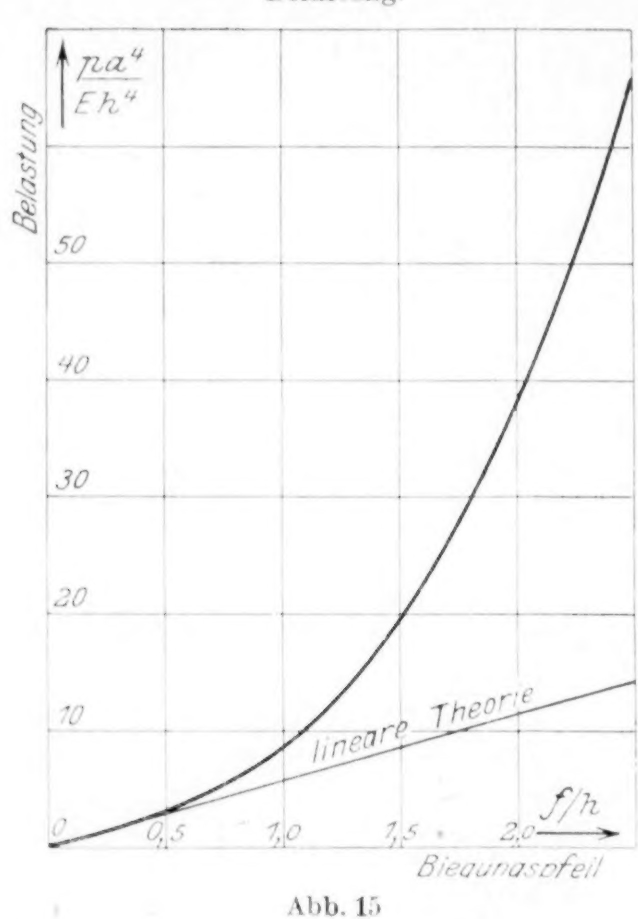


Abb. 15

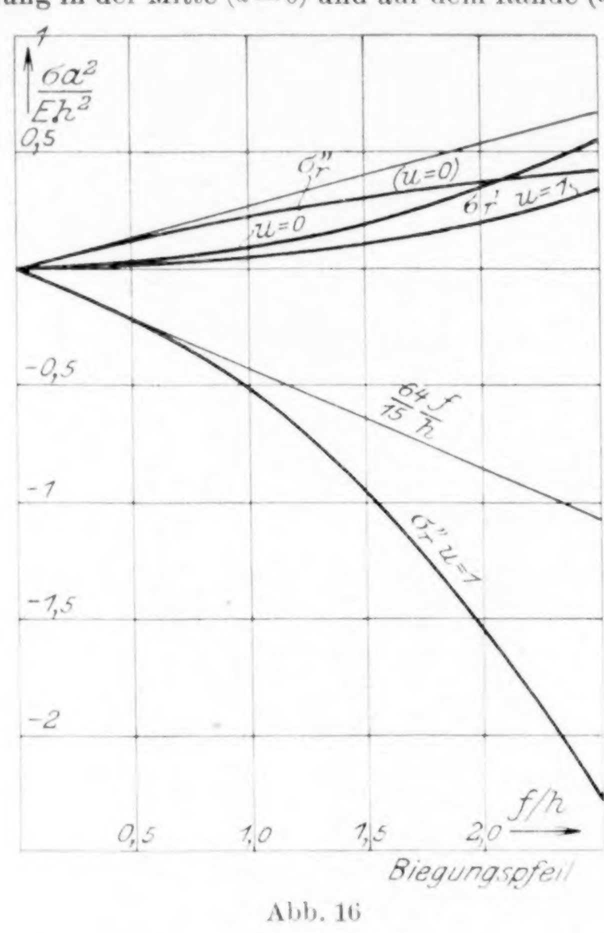


Abb. 16

Zusammenhang des Biegungspfeiles f in der Mitte der Platte mit dem Druck p kann etwa bis zur zweiundeinhalbfachen Dicke durch die Funktion

$$\frac{p a^4}{E h^4} = 5{,}69 \frac{f}{h} + 3{,}32 \left(\frac{f}{h}\right)^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

wiedergegeben werden. Die Platte wird am stärksten auf dem Rand verbogen und beansprucht, die mit der zunehmenden Wölbung in einem Randring sich mehr und mehr verschärfende Biegung bringt die Zunahme des Exponenten n im Ansatz (46) zum Ausdruck.

In ähnlicher Weise läßt sich die Biegung einer frei aufliegenden Platte durch den Ansatz

$$\Phi = c\left(u - \frac{1+\nu}{n+\nu} u^n\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (61)$$

behandeln (Abb. 17). Sie gibt Anlaß zur Entstehung von Druckspannungen in tangentialer Richtung in der Mittelfläche entlang des Randes.

Freiaufliegende kreisförmige Platten großer Ausbiegung.

Abb. 17

4. Versuche mit Glasplatten. Die Grundlagen der Theorie der Biegung dünner Platten und Schalen bedürfen nach zwei Richtungen einer experimentellen Nachprüfung. Soweit es sich um die elastisch-isotropen Körper und die aus einem Haufwerk von regellos orientierten Kristalliten aufgebauten Körper handelt, deren Teilchen unter den in Betracht gezogenen Spannungszuständen gut zusammenhalten und keine merklichen Schiebungen entlang ihren Grenzflächen oder in ihrem Innern erfahren, sind die allgemeinen Grundlagen ihrer mathematischen Theorie erfüllt. Sie werden durch die zahlreichen Versuche gestützt, die man mit stabförmigen Körpern aus diesen Stoffen gemacht hat. Unter Elastizitätsversuchen, die den Vergleich mit der Theorie an plattenförmigen Körpern anstrebten, sind mir nur die mit kreisförmigen Flußeisenplatten gemachten Versuche von A. Föppl[1]) bekannt. Die zahlreichen Versuche von

[1]) Mitteil. aus dem mech.-techn. Laboratorium der Techn. Hochschule München, 1900.

C. v. Bach lassen sich zu einer Ueberprüfung der Plattentheorie nicht heranziehen, weil bei ihnen die Einhaltung genauer definierter Randbedingungen nicht beabsichtigt war. An den in der Mitte und exzentrisch durch eine Einzelkraft belasteten, frei aufliegenden Platten von A. Föppl zeigte sich eine gute Uebereinstimmung der theoretisch verlangten mit der beobachteten Gestalt der durchgebogenen Platte, die absoluten Werte des aus den Biegungsversuchen abgeleiteten Elastizitätsmoduls standen aber nicht in ganz befriedigender Uebereinstimmung mit dem aus anderen Versuchen bestimmten Wert. Zu erwähnen wäre ferner die Bestimmung der Frequenz transversal schwingender quadratischer Platten von Walter Ritz[1]), über deren Zahlen die Beobachtungen von Strehlke vorliegen.

Während also das Elementargesetz in den elastisch-isotropen Körpern als bestätigt gelten darf, bleibt bei den Platten aus solchen Stoffen das Verhalten auf dem Rande noch zu beachten. Die in der Theorie gemachte und in der Mehrzahl der in den Anwendungen vorkommenden Biegungsfälle von Platten und Schalen zutreffende Voraussetzung kleiner Durchbiegungen im Vergleich zu ihrer Dicke hat zur Folge, daß die Ungenauigkeiten in der Herstellung ihrer Auflagerflächen oder die Verschiebungen, welche die Ränder wegen der elastischen Nachgiebigkeit der Unterlage erleiden, die Grenzbedingungen beeinflussen dürften. Die praktisch wichtige Frage, wie groß die zu erwartenden Abweichungen sind und bis zu welchem Grade die der Rechnung zugrunde gelegten Grenzbedingungen frei aufliegender und eingespannter Plattenränder in den praktischen Konstruktionen als erfüllt betrachtet werden können, ist nicht hinreichend geklärt. So entziehen sich die Bewegungen der Ränder der frei aufliegenden Platten während ihrer Belastung einer genaueren Kenntnis. Die in der Rechnung gemachte Voraussetzung stetiger Auflage dürfte — wie man schon aus den alten Versuchen von Bach weiß — bei Platten mit ausspringenden Ecken kaum erfüllt sein, wenn nicht besondere Vorkehrungen getroffen sind, um das Abheben der Ecken zu verhindern. Es ist wahrscheinlich, daß man ihren Formänderungs- und Spannungszuständen eher näher kommen wird, wenn man den entgegengesetzten Grenzfall, nämlich den der Punktstützung — beispielsweise bei rechteckigen Platten in den Seitenmitten — der Rechnung zugrunde legt. Hr. Professor L. Prandtl hat es mir in dankenswerter Weise ermöglicht, mit von der Jubiläumsstiftung der deutschen Industrie zu diesem Zweck freundlichst gewährten Mitteln einige Versuche mit kreisförmigen Platten machen zu können. Aus dem eben Gesagten ergibt sich für die mit Platten anzustellenden Elastizitätsversuche die Forderung der scharfen Einhaltung der Grenzbedingungen. Von den zahlreichen Lösungen der Plattengleichung dürften sich zu einem Elastizitätsversuch besonders solche eignen, die zu einem statisch bestimmten System der Auflagerreaktionen gehören. Für diesen Zweck kommen der Belastungsfall einer rechteckigen Platte durch vier in ihren Ecken angreifende Einzelkräfte in Betracht, die gleich, jedoch paarweise entgegengesetzt gerichtet sind, an dem ich vor einigen Jahren Versuche anstellte, und beispielsweise die hier erwähnten Formänderungszustände in zwei oder höchstens in drei Punkten unterstützter kreisförmiger Platten. Einige Biegungsversuche, die ich mit in dieser Art unterstützten kreisförmigen Platten aus Glas machte, ergaben eine recht gute Uebereinstimmung der von der Rechnung verlangten Form der verbogenen Platte mit der beobachteten. Als Belastung wurde die Einzelkraft in der Mitte gewählt. Die Durchbiegungen der Platte konnten mittels eines zugespitzten Fühlstiftes an jeder Stelle der Platte beobachtet werden. Der Elastizitätsmodul des Glases wurde, ähnlich wie dies bei den Versuchen von A. Föppl geschehen war, aus Biegungsversuchen mit schmalen Streifen (es wurden drei Streifen unter einer Einzelkraft in der Mitte und drei Streifen in reiner Biegung untersucht) ermittelt:

Biegung von Streifen unter Einzelkraft . .	723 000	723 000	731 000	Mittel 726 000
reine Biegung	730 000	728 000	733 000	» 730 000

Mittel aus Streifenversuchen: 728 000 kg/cm².

Die kreisförmigen Platten wurden entweder in zwei auf einem Durchmesser oder in drei in einem gleichseitigen Dreieck gelegenen Randpunkten auf Stahlspitzen (um die Platte gegen das Kippen im Falle der Zweipunktstützung zu sichern, wurde statt der einen Spitze eine kurze Schneide benutzt) gelagert und in der Mitte belastet. Mit Hilfe der Formeln für den Biegungspfeil der in zwei bezw. in drei Punkten gestützten Kreisplatte wurden aus den Plattenversuchen die folgenden Werte für den Elastizitätsmodul ermittelt:

---

[1]) Annalen der Physik, Bd. 28, S. 737, 1909.

	Platte 1	2	3	
Platte liegt in zwei Punkten auf	728000	733000	718000	Mittel 726000
» » drei	713000	730000	718000	» 720000

Mittel aus Plattenversuchen: 723000 kg/cm².

Die Uebereinstimmung der aus den Biegungsversuchen mit den Streifen und mit den kreisförmigen Platten nach der Kirchhoffschen Plattentheorie berechneten Durchbiegungen fällt sehr befriedigend aus. Zum Vergleich ist nachzutragen, daß hier für die Poissonsche Zahl $\nu = {}^1/_4$, der aus sonstigen Elastizitätsversuchen mit Glas bekannte Wert angenommen wurde. Die Formeln für den Biegungspfeil hätten ohne weiteres gestattet, auch die Querdehnungszahl neben dem Elastizitätsmodul als eine unbekannte Materialkonstante anzusehen und zu ermitteln. Wegen der Uebereinstimmung der obigen Zahlen wurde von der genaueren Ausgleichung abgesehen. Es darf noch erwähnt werden, daß sich die von den Punktbelastungen hervorgerufenen Störungen im Spannungszustand bei den Glasplatten wegen der kleinen Werte der Schubspannungen nicht bemerkbar machten, während ich bei meinen früheren Versuchen mit in ihren Ecken durch Einzelkräfte belasteten quadratischen Platten ihren Einfluß deutlich feststellen konnte. Als ich die Versuche mit auf ihrem Umfang abgestützten Platten wiederholte (Abb. 18), konnte die Linearität zwischen den Durchbiegungen und der Kraft unter kleinen Belastungen nicht beobachtet werden, zum Zeichen daß sich die Platten erst allmählich an ihre Unterlage anlegten. Aus der Neigung der mit der steigenden Belastung schließlich sich einstellenden mittleren Geraden ergaben sich jedoch mit Benutzung der Formel für den Biegungspfeil der frei aufliegenden Platte die Werte des Elastizitätsmoduls

Versuche mit freiaufliegenden kreisförmigen Glasplatten.

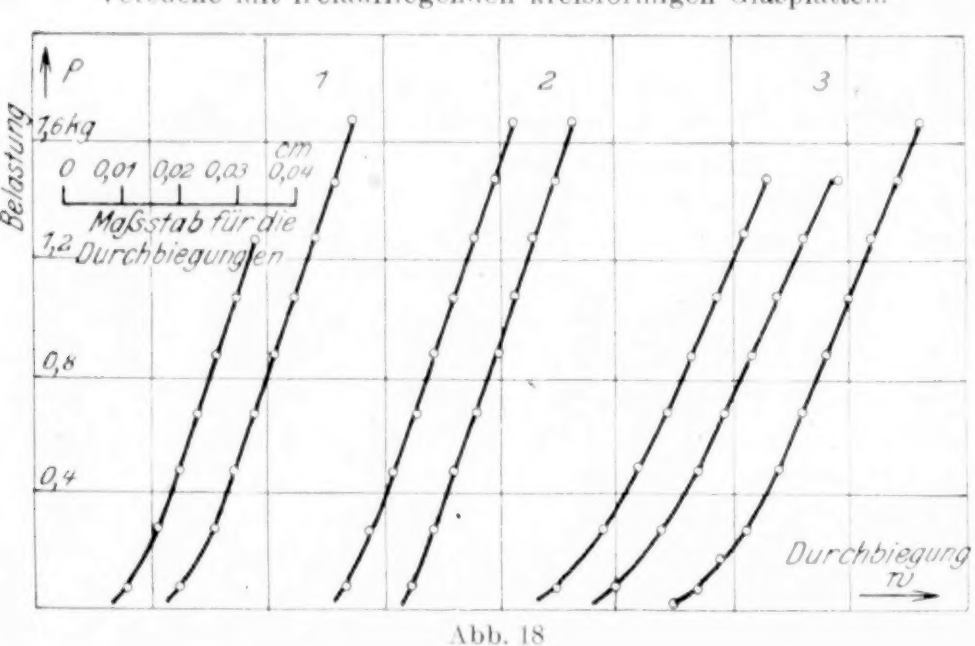


Abb. 18

Platte	1	2	3
	728000	732000	706000 kg/cm²,

die mit Ausnahme des letzten Wertes ebenfalls nahe zum obigen Mittelwert liegen. (Die Platte 3 war, wie durch Abklopfen auf ihrer Unterlage sich zeigte, am wenigsten eben.) Bei Eisen oder Stahl hätte sich vermutlich der Einfluß einer ungleichmäßigen Auflage auf dem Rand auf den Biegungspfeil wegen des größeren Elastizitätsmoduls stärker bemerkbar gemacht.

5. Versuche mit Stahlblechplatten.

In einer zweiten Versuchsreihe wurden die Durchbiegungen von dünnen, unbearbeiteten Stahlblechplatten, die einem hydraulischen Druck ausgesetzt waren, gemessen. Sie hatten eine Dicke von 4 mm. Die Versuchsanordnung zeigt die Abb. 19. In ihr konnten sowohl eingespannte, als freiaufliegende Kreisplatten belastet werden. Die Einzelheiten der Randbefestigung sind aus den Abb. 20 und 21 zu ersehen. Der Elastizitätsmodul des Stahlblechs wurde an zwei Streifen mittels Biegungsversuches zu

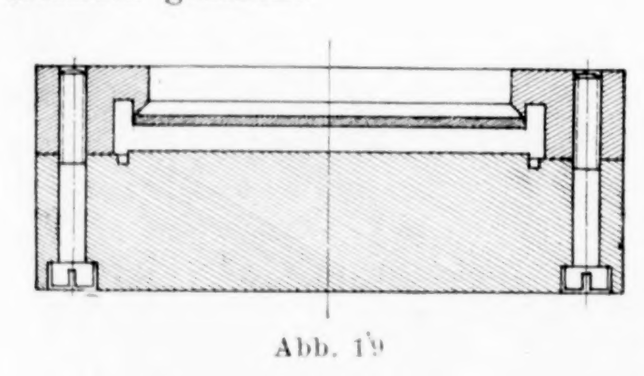


Abb. 19

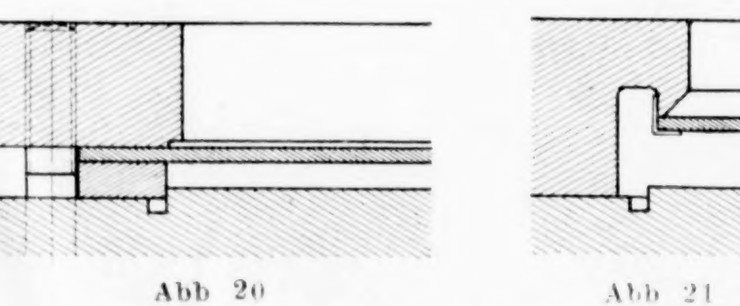


Abb. 20 Abb. 21

$$E = 2080000, \quad 2140000 \text{ kg/cm}^2$$

und mit Martensschen Spiegelgeräten aus Zugversuchen gleich

$$E = 2090000, \quad 2110000 \text{ kg/cm}^2$$

im Mittel gleich $E = 2110000$ kg/cm² er-

Biegungsversuche mit eingespannten Kreisplatten aus Stahl.

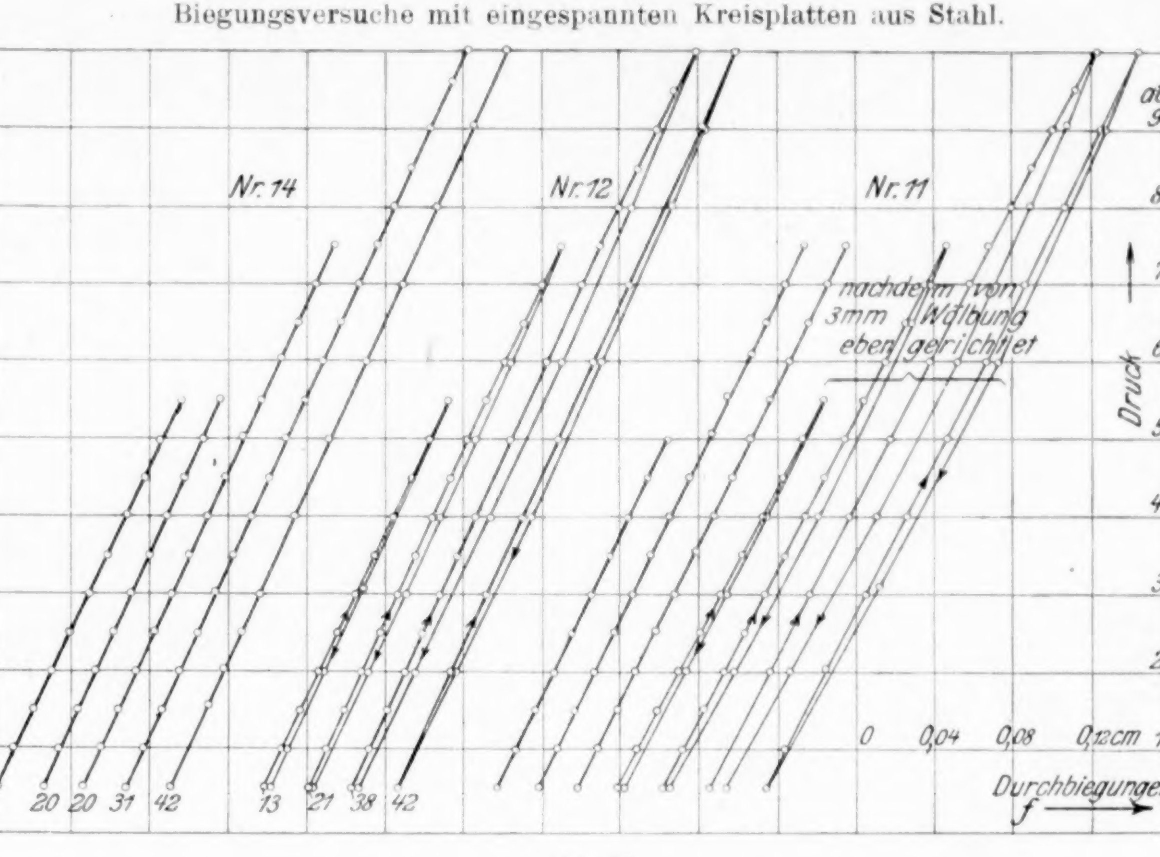


Abb. 22

mittelt. Die eingespannten Platten hatten einen äußeren Durchmesser von 25 cm und einen Halbmesser des Einspannungskreises von $a = 10{,}77$ cm. Die Platte 14 war im Anlieferungszustand eben, die Platten 11 und 12 waren um einige Zehntel Millimeter krumm und wurden nicht gerichtet. Die Abb. 22 zeigt die mit ihnen vorgenommenen Biegungsversuche, als Abszissen sind die Durchbiegungen in der Mitte (f), als Ordinaten die Drucke in at aufgetragen. Die einzelnen Kurven sind in wagerechter Richtung verschoben gezeichnet. Die Zahl unter dem Anfangspunkt jeder Kurve bedeutet die aus den vorangehenden Versuchen zurückgebliebene bleibende Durchbiegung in Schätzungseinheiten der Beobachtungsskale. (100 S. E. bedeuten 0,02 cm.) Mit Benutzung des aus den Biegungsversuchen mit den Streifen und den Zugversuchen bestimmten Wertes des Elastizitätsmoduls und einer **Poisson**schen Zahl $\nu = 0{,}3$ mußte der Zunahme des Druckes p um 1 at nach der für unendlich kleine Durchbiegungen gültigen Formel des Biegungspfeiles

$$f = \frac{3(1-\nu^2)}{16} \frac{p a^4}{E h^3} = 0{,}171 \frac{p a^4}{E h^3}$$

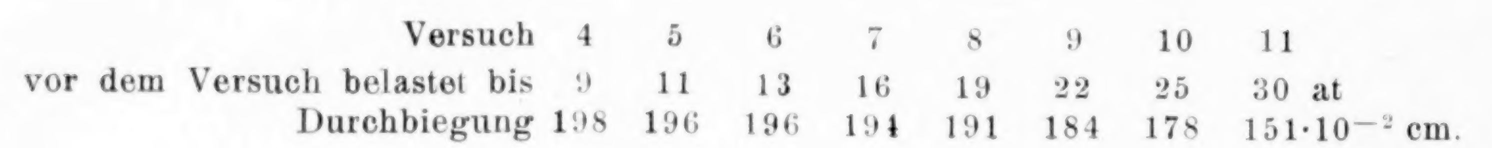
der auf ihrem Umfang $r = a$ eingespannten Kreisplatte von der Dicke h eine Zunahme der Durchbiegung in der Mitte um

Platte	14	11	12	
$h =$	0,398	0,402	0,405	cm
$a =$	10,77	10,77	10,77	»
$f =$	0,0174	0,0168	0,0165	»

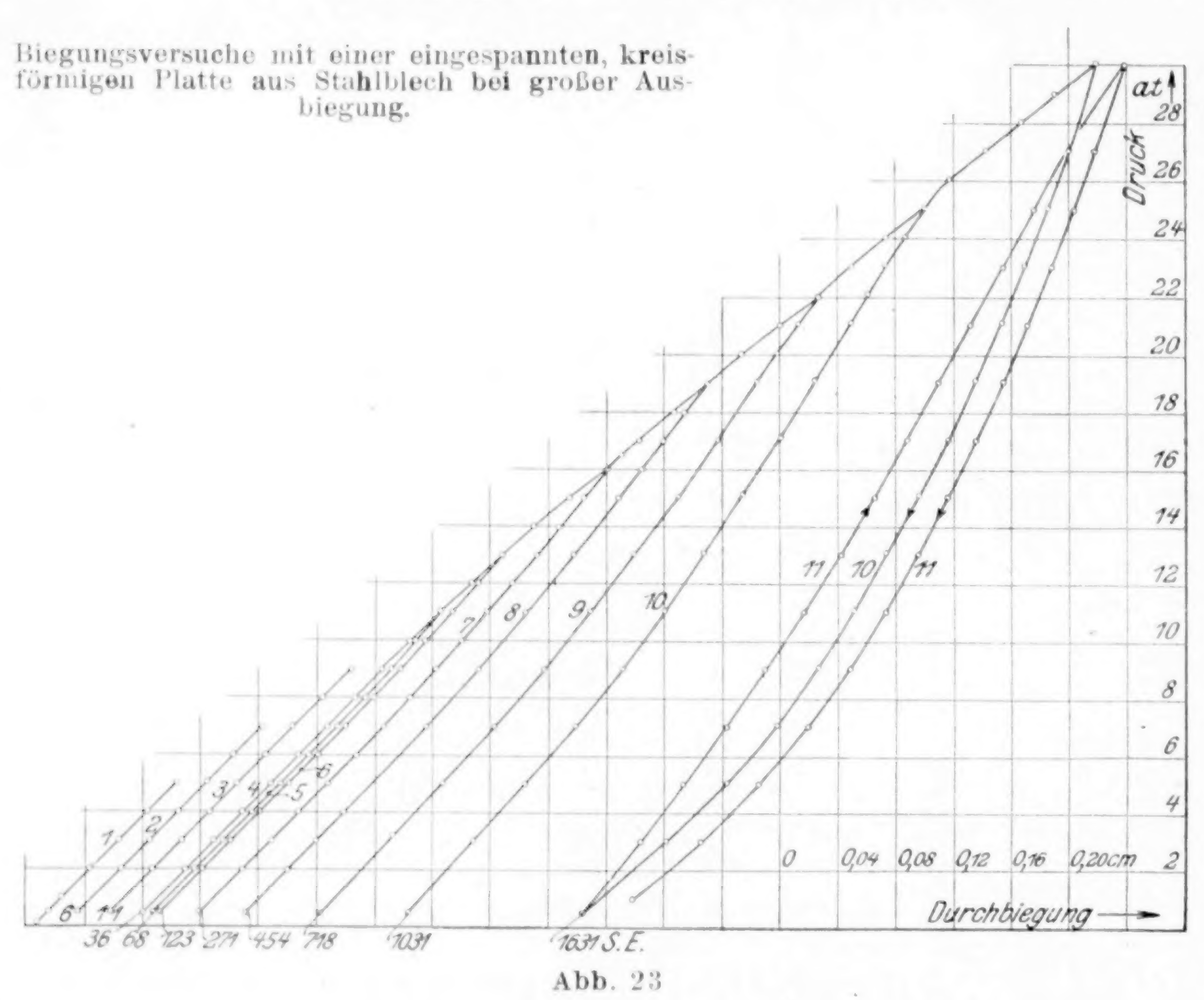
entsprechen. Die beobachteten Werte waren

Platte 14: Versuch		Platte 11: Versuch		Platte 12: Versuch	
1	0,0190	1	0,0192	1	0,0189
2	0,0184	2	0,0194	2	0,0183
3	0,0184	3	0,0195	3	0,0183
4	0,0182			4	0,0184
5	0,0183				

durchwegs größer, im Mittel um 6,1, 12,0, 15,3 vH. Man wird kaum fehlgehen, wenn man diesen Unterschied einer wohl kaum zu vermeidenden Unvollkommenheit des eingespannten Randes zuschreibt. Die radialen Dehnungen der Platte können längs des Randkreises $r = a$ nicht plötzlich aufhören und ein Stück der Platte jenseits des Einspannungskreises muß zur Deformation herangezogen werden. Die Wirkung dieses mit Gleiten verbundenen radialen Nachgebens ist dieselbe wie eine Vergrößerung des »Einspannungshalbmessers« a. Gelegentlich von Stabilitätsversuchen mit flachen Stäben hat **Prandtl** ähnliche Beobachtungen gemacht, bei denen eine durch die Reibungskräfte während des Gleitens in den Einspannungsbacken hervorgerufene Hystereris in den Last-Durchbiegungskurven zutage trat. Eine Versuchsreihe mit einer eingespannten Platte nach der Ueberschreitung der Fließgrenze zeigt die Abb. 23. Die anfängliche Neigung der Kurven bei der Last Null nimmt, wie man sieht, nach jeder Laststeigerung zu. Einer Zunahme des Druckes um 1 at bei der Last Null entsprachen die Durchbiegungen:



Versuch	4	5	6	7	8	9	10	11
vor dem Versuch belastet bis	9	11	13	16	19	22	25	30 at
Durchbiegung	198	196	196	194	191	184	178	$151 \cdot 10^{-2}$ cm.



Biegungsversuche mit einer eingespannten, kreisförmigen Platte aus Stahlblech bei großer Ausbiegung.

Abb. 23

In diesen Zahlen äußert sich das Steiferwerden der Platte während der Wölbung trotz des durch das starke Fließen einsetzenden Spannungsausgleiches. Die große Hystererisschleife zwischen den Belastungs- und Entlastungskurven am Ende der Versuchsreihe rührt vom starken Fließen, das nach jeder Lastumkehr von neuem einsetzt, her. Nach dem letzten Versuch hatte die Platte eine bleibende Wölbung mit einem mittleren Pfeil von etwa 3,3 mm. Sie wurde hierauf mittels Hämmern, so gut es ging, eben gerichtet. Ein 8 Monate später mit ihr vorgenommener Elastizitätsversuch ergab für 1 Atm. Druckzunahme bei der ersten **0,0212 cm** und bei der zweiten Belastung **0,0205 cm** Durchbiegung. Die versteifende Wirkung der Wölbung war zwar verschwunden, dafür zeigten sich aber, von den kleinsten Drucken angefangen, sehr beträchtliche bleibende Formänderungen, zum Zeichen der starken Selbstspannungen, die das Richten in ihr hinterlassen hatte.

Einen **Elastizitätsversuch mit einer freiaufliegenden Platte** (Dicke 0,401 cm, Halbmesser des Auflagerkreises 9,79 cm, Halbmesser der Platte 9,97 cm) zeigt die Abb. 24. Die mit Nr. 6 versehene Kurve wurde erhalten, nachdem zwischen die Platte und ihre Unterlage drei Beilagen von $^1/_{10}$ mm Dicke in drei annähernd ein gleichseitiges Dreieck bildenden Punkten geschoben wurden. Sie verläuft etwas flacher als die früher aufgenommenen Kurven und weist eine Zunahme von 0,0457 cm auf. Die Kurven 7 und 8 beziehen sich schließlich auf zwei Biegungsversuche, während welchen durch zwei Beilagen von 0,67 mm Stärke eine Stützung der Platte in zwei auf einem Durchmesser gelegenen Punkten erzwungen wurde. Die Erklärung für den Knick in den Kurven liegt auf der Hand; unter der Last, die ihm entspricht, erreichte der Plattenrand in neuen Stellen zwischen den beiden ersten Stützpunkten die Unterlage und ruhte, von diesem Druck angefangen, vermutlich in vier Punkten auf. Wenn man nicht dicke Platten mit einer sorgfältig bearbeiteten Auflagerfläche verwendet, wird man eine exakte Erfüllung der Randbedingung innerhalb der Fehlergrenzen der Versuchsreihe der in statisch bestimmter Art unterstützten Platten kaum erwarten können. Die Durchbiegung der freiaufliegenden Platte hätte für die unendlich kleinen Wölbungen mit einer **Poisson**schen Zahl von $\nu = 0,3$

$$f = \frac{3\,(5+\nu)\,(1-\nu)}{16}\,\frac{p\,a^4}{E\,h^3} = 0,696\,\frac{p\,a^4}{E\,h^3}$$

betragen und eine Zunahme von

$$0,0471 \text{ cm/at}$$

bei der Last Null aufweisen müssen. Dieser Betrag weichtum 6,3 vH vom beobachteten Mittel ab. Die im elastischen Bereich der Formänderungen aufgenommenen Kurven 1 bis 5 zeigen in ihrem weiteren Verlauf die von der Theorie der Platten großer Ausbiegung

verlangte Form. Ein genauer Vergleich mit der von der Rechnung geforderten Kurve wird wegen ihrer bereits am Nullpunkt um den eben angegebenen Betrag abweichenden Neigung erschwert.

Versuche mit freiaufliegenden Kreisplatten aus Stahl.

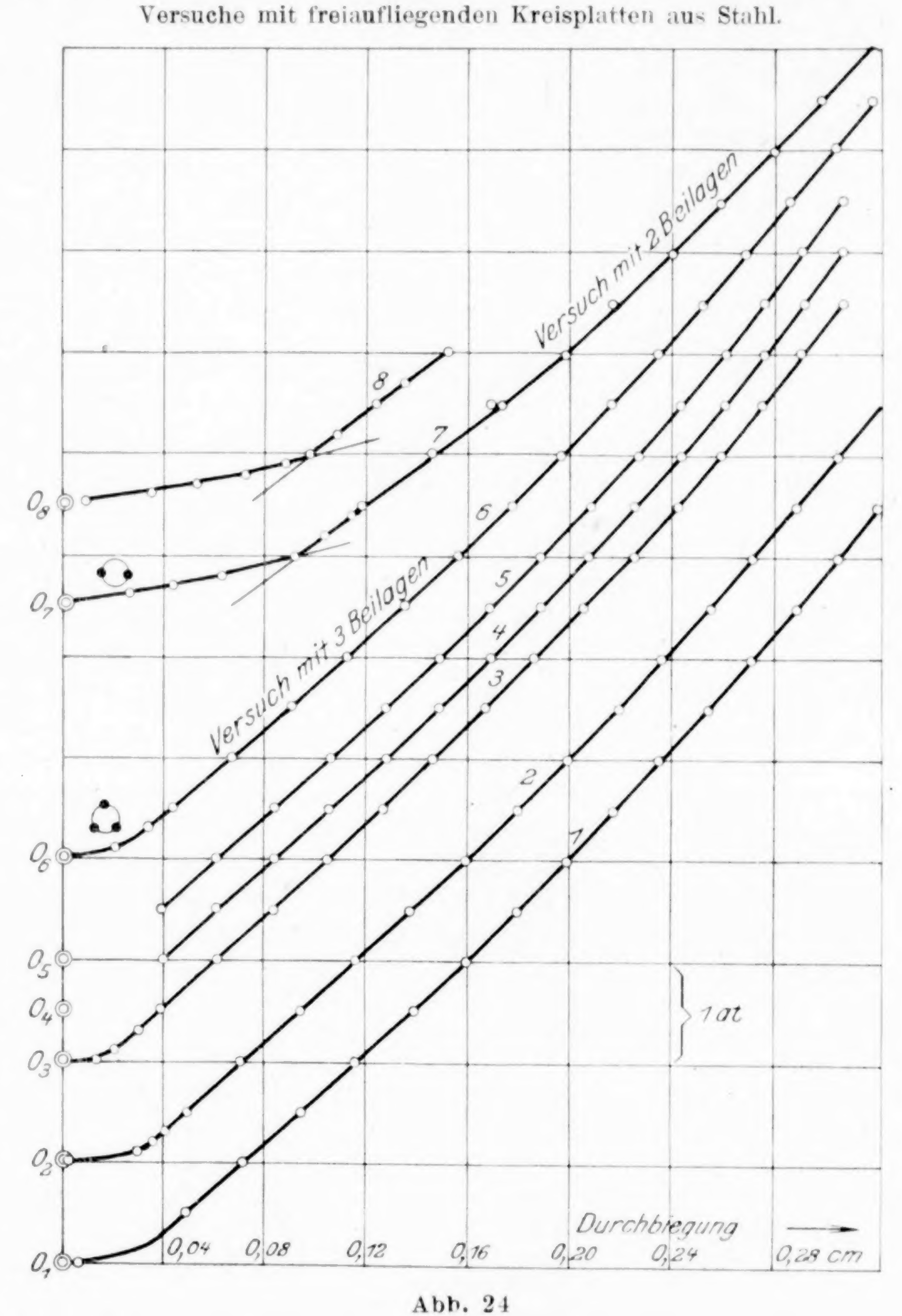


Abb. 24

Wir haben vorhin auf die Wirkung der Eigenspannungen in der nach einer bleibenden Wölbung wieder durch Hämmern eben gerichteten Platte hingewiesen. Während die Gegenwart von Eigenspannungen in einem kompakten Stück eines elastischen Metalles in einem Elastizitätsversuch nicht festgestellt werden kann und sich höchstens in der Verschiebung der Fließgrenze äußern wird, läßt sich leicht einsehen, daß Eigenspannungssysteme, welche die Mittelebene einer dünnen Platte spannen, sich in ihrem Verhalten während eines Biegungsversuches verraten müssen. Wenn die Zugspannungen in ihr überwiegen, verhält sich die Platte steifer und umgekehrt, wenn in ihrer Mittelebene die Druckspannungen vorherrschen, weicher als im natürlichen Zustand. Es ist mir nicht bekannt, ob die Wirkung dieser Eigenspannungen auf die Schwingungen beobachtet ist, welche die Platten infolge ihrer Biegungssteifigkeit vollführen können. Sie müßten sich in einer Hebung bezw. in einer Senkung des Tones äußern (eine unter einer Knickbelastung stehende Platte hat die Schwingungsdauer unendlich).

Wenn eine eingespannte kreisförmige Platte durch einen gleichförmigen Druck p belastet und in ihrer Ebene gleichmäßig durch eine Zugspannung σ angespannt wird, ist ihr Wölbungspfeil in der Mitte nach der Theorie der unendlich kleinen Durchbiegungen gleich

$$w = \frac{p a^4}{4 N}\left[1 + \frac{2\,(J_0\,(i \alpha a - 1)}{i \alpha^3 a^3 J_1\,(i \alpha a)}\right],$$

wo mit a ihr Halbmesser, mit h ihre Dicke, mit $N = \frac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ mit $\alpha^2 = \frac{\sigma h}{N}$ und mit J_0 bezw. J_1 die Besselschen Funktionen der Zeiger Null und Eins bezeichnet sind. Den Zahlen entsprechen die Wölbungspfeile

$\alpha a =$	0	1,	2,	3,	4,	5,	. . .
$w =$	0,0156	0,0146	0,0122	0,0096	0,0074	0,0057 ,	. . .

Nachdem die Spannung proportional α^2 ist, nehmen die zu den angeschriebenen Zahlen αa gehörigen Spannungen wie die Quadrate zu. Sie zeigen bereits innerhalb unendlich kleiner Durchbiegungen die starke Abhängigkeit des Durchhanges von einer in ihrer Mittelebene gleichmäßig angespannten und durch einen Druck in der Querrichtung

belasteten Platte von dieser Spannung an. In einer gerichteten Metallplatte oder einer Platte, welche in ihrer Ebene bleibend verzerrt worden ist, verbleiben nach ihrer Entlastung Selbstspannungen. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß man für die Elastizitätskonstanten aus Versuchen mit solchen Platten nicht dieselben Werte finden wird, wenn auf die Eigenspannungssysteme keine Rücksicht genommen wird, wie aus Versuchen mit Platten, deren Mittelebene im natürlichen Zustand ungespannt ist. Der störende Einfluß der Eigenspannungen hätte vermieden werden können, wenn die Versuche mit ausgeglühten Metallplatten gemacht worden wären. Die Versuche mit den nicht besonders hergerichteten Stahlplatten lassen die Größenordnung der Abweichung erkennen, die man unter der Anordnung der Abb. 19 bis 21 in der Erfüllung eines eingespannten und eines frei aufliegenden Randes beim Kreis zu erwarten hat. Die Versuche von A. Föppl und die hier erwähnten mit den Glasplatten dürften den Nachweis bestärken, daß, wenn auf die Voraussetzungen der Rechnung in den Versuchen hinreichend geachtet wird, die berechnete Form der verbogenen Platte in guter Uebereinstimmung mit der beobachteten gefunden wird. Die Versuche mit den Stahlplatten zeigen, daß mit den Anordnungen der Abb. 19 bis 21 praktisch auf eine Verwirklichung der Grenzbedingungen eines eingespannten und eines frei aufliegenden Randes (innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen) gerechnet werden darf. Das Verhältnis der Dicke zum Durchmesser betrug für sie $^1/_{200}$, für dickere Platten und solche mit bearbeiteten Auflagerflächen dürfte eine kleinere Abweichung zu erwarten sein, für wesentlich dünnere Platten jedoch die Einhaltung oder Verwirklichung genauer definierter Randbedingungen praktisch schwierig werden. Einige Versuche, die ich in dieser Richtung mit 3 mm starken Stahlblechplatten von denselben Abmessungen machte, scheiterten an ihren anfänglichen Unebenheiten.

6. Bemerkung über Betonplatten. Das zweite Gebiet, auf dem ein Bedürfnis für die Vornahme von Versuchen vorliegt, ist das der unvollkommen elastischen Körper, vor allem das des Eisenbetons. Sein elastisches Verhalten, soweit man von einem solchen sprechen kann, unter zusammengesetzter Beanspruchung ist noch gar nicht näher bekannt. Die Klärung der für die Berechnung der Eisenbetonplatten wichtigen Fragen wäre von der Untersuchung einer homogenen und einer durch Eisenstangen nach zwei zueinander senkrechten Richtungen bewehrten Betonplatte unter gleichmäßig verteilt wirkenden Randmomenten zu erhoffen. Die Beschränkung der Versuche auf einen in statischer Hinsicht einwandfrei definierten Spannungszustand wäre wünschenswert.

Es ist wahrscheinlich, daß man dem Verhalten der porösen Betonmasse durch die Annahme einer Poissonschen Zahl $\nu = 0$ Rechnung tragen kann. Die amerikanischen Ingenieure scheinen diese Annahme in ihren Berechnungen der in den Vereinigten Staaten viel ausgeführten durchlaufenden Decken zu benutzen[1]. Wenn man von einem Dimensionsfaktor absieht, nehmen die aus der Theorie für die elastischen Platten entnommenen Spannungsmomente die Form

$$m_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad m_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad m_{xy} = \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y}$$

an, mit Hilfe von welchen Formeln in der Erfüllung von statischen Grenzbedingungen gegenüber der gewöhnlichen Theorie eine nicht unbeträchtliche Vereinfachung in der Rechnung zu erwarten ist. Trotz der Unfähigkeit der Betonmasse, Zugspannungen von nennenswertem Betrag aufnehmen zu können, würde man die Betonplatte auf Grund dieser Formeln zuerst als eine homogene und elastische Platte rechnen. Für die Bemessung des zur Verstärkung in die Betonmasse zu versenkenden Gerippes der Eiseneinlagen wären die durch die obigen Formeln gegebenen Momentenflächen als maßgebend zu betrachten. Mit Rücksicht auf statische Gesichtspunkte wären die Eiseneinlagen so zu verlegen, daß sie den Hauptbiegungsrichtungen der homogenen Platte folgen würden. Die auf die Oberfläche der Platte zu beziehende Dichtigkeit der auf den Zugseiten anzubringenden Eisenbündel wäre den Hauptbiegungsmomenten proportional zu setzen. 217

Göttingen, Ende September 1922.

---

[1] Man vergleiche die zusammenfassende Arbeit von H. M. Westergaard und A. Slater: Moments and stresses in slabs. Proc. of the american concrete Institute, 17, 1921, Nr. 32.

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Erweiterung der Clapeyronschen Gleichung. Die Berechnung der Stützenmomente des durchlaufenden Trägers wird bekanntlich durch die zuerst (1855) von Bertot, später (1857) von Clapeyron aufgestellten Gleichungen geleistet, die allgemein als die Clapeyronschen Gleichungen bezeichnet werden. Sie bilden eine Beziehung zwischen den drei Stützenmomenten von zwei aufeinander folgenden Oeffnungen und werden aus der Bedingung gewonnen, daß die elastische Linie stetig verläuft, daß also an der Zwischenstütze die Tangente an die elastische Linie für beide Oeffnungen die gleiche ist. E. Schmidt stellt nun Gleichungen auf, die drei beliebige Stützenmomente M_p, M_r, M_q umfassen, indem er von der bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme üblichen Einführung statisch unbestimmter Hauptsysteme Gebrauch macht (Der Eisenbau 1922, S. 71 bis 77). Das auf vielen Stützen gelagerte Trägerstück p, r, q wird in die zwei Hauptsysteme p, r und r, q zerlegt mit den Stützenmomenten M_p, M_r und M_q. In Hinblick auf die Stetigkeit der Biegungslinie schließt diese an der Stütze r zu beiden Seiten denselben Winkel mit der Trägerlinie ein und aus diesem Ansatz geht die Momentengleichung

$$M_p (\mathfrak{M}_{p+1,r}\, l_p) + M_r [\mathfrak{M}_{r-1,r}\, l_r + 2 (l_r + l_{r+1}) + \mathfrak{M}_{r+1,r}\, l_{r+1}] + M_q (\mathfrak{M}_{q-1,r}\, l_{q-1}) = L_{r,q},$$

hervor, die in gewissem Sinne eine Erweiterung der Clapeyronschen Gleichung vorstellt. l_i ist die Länge der Oeffnung zwischen den Stützen $i-1$ und i. $\mathfrak{M}_{i,r}$ ist das Moment am statisch unbestimmten Hauptsystem an der Stütze i infolge der Ursache $M_r = 1$. Die Momente $\mathfrak{M}$ können für die einzelnen Trägerteile mit Hilfe der gewöhnlichen Clapeyronschen Gleichung bestimmt werden. Der Ausdruck $L_{p,q}$ enthält den Einfluß der Belastung, der Stützensenkungen und der Temperaturwirkung über die Strecke p, q. — Sind aus diesen Gleichungen die Stützenmomente M_p, M_r u. s. f. gefunden, so werden alle übrigen nach irgend einem Verfahren berechnet, wobei wieder jedes Hauptsystem für sich zu betrachten ist. Diese Methode eignet sich besonders dann, wenn bei vielen Stützen nur einige Stützenmomente gesucht werden.

Zur Berechnung des kontinuierlichen Trägers. Die Stützenmomente sind bei gleichförmig verteilter Vollbelastung eines Feldes leicht bestimmbar, vielfach auch in Tabellen zusammengestellt und es sei z. B. ein Stützenmoment mit $m p l^2$ gegeben, wobei p die gleichförmig verteilte Belastung pro Längeneinheit, l die Feldlänge und m einen Zahlenfaktor bedeuten. J. Vinzenz zeigt, daß man dann die Stützenmomente, die durch Belastung dieses Feldes mit zur Mitte symmetrischen gleichen Lasten entstehen, ein Fall, der in praxi häufig vorkommt, auf einfache Weise finden kann (Der Bauingenieur 1921, S. 695 bis 698 und vergl. auch 1922, S. 285). Man muß nur die folgenden zwei Eigenschaften der Einflußlinie für das Stützenmoment, d. i. einer kubischen Parabel, beachten. Sie ist innerhalb einer Oeffnung flächengleich mit einer gewöhnlichen Parabel, deren Scheitelordinate gleich der Mittelordinate der kubischen ist. Aus dieser Bedingung ist die gewöhnliche Parabel gegeben. Ferner sind die Differenzen der Ordinaten beider Parabeln in gleichen Abständen von der Mitte entgegengesetzt gleich. Daher ist für zwei zur Mitte symmetrische Einzellasten die Summe der beiden Einflußordinaten gleich der Summe der Ordinaten der gewöhnlichen Parabel an derselben Stelle. Das Stützenmoment erhält man damit in der Form $\alpha\, m p l^2$, mit α als einem Zahlenfaktor. — Die allgemeine Bedingung für die Gleichwertigkeit zweier Belastungen in einer Oeffnung (hinsichtlich der Stützenmomente) ist die, daß beide Lastangriffe die gleichen Neigungswinkel der Biegungslinie an den Stützen ergeben.

Die Knickfestigkeit eines dünnen Stabes mit elastisch eingespannten Enden. Die Frage der Knickfestigkeit von dünnen Stäben wurde in letzter Zeit mehrfach erörtert und es muß zugegeben werden, daß diese Probleme tatsächlich von eigenartigem Reiz sind. H. Zimmermann, dem diese Aufgaben bereits vieles zu verdanken haben, untersucht in einer neueren Arbeit die Knickfestigkeit eines einteiligen geraden Stabes im Sinne der klassischen Theorie, d. i. unter Zugrundelegung des vereinfachten Ausdrucks für die Differentialgleichung der elastischen Linie (Zentralblatt der Bauverwaltung 1922, S. 34 bis 39). Grundsätzlich neue Erkenntnisse können auf diesem Wege nicht gewonnen werden, aber die Darstellung Zimmermanns ist infolge ihrer Einheitlichkeit von Interesse.

Für einen Stab von der Länge s, der an seinen Enden 1 und 2 elastisch gestützt ist, durch eine Kraft S axial belastet wird und an dessen Enden die Biegungsmomente M_1 bzw. M_2 angreifen, ergibt bekanntlich die Näherungstheorie der elastischen Linie für die Neigungswinkel der Biegungslinie in 1 und 2

$$\nu_1 = \psi' M_1 + \psi'' M_2 + \nu_{1,2}$$
$$-\nu_2 = \psi'' M_1 + \psi' M_2 - \nu_{1,2},$$

wobei $\psi' = \frac{1}{S s}\left(1 - \frac{\alpha}{tg\,\alpha}\right)$, $\psi'' = \frac{1}{S s}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right)$,

$\alpha = s \sqrt{\frac{E J}{S}}$. E ist der Elastizitätsmodul des Stabmaterials, J das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfläche, $\nu_{1,2}$ der Winkel, den

die Stabachse nach der Deformation mit der ursprünglichen Stabrichtung einschließt.

Bei elastischer Einspannung eines Stabendes setzt man das hierdurch entstehende Moment proportional dem Ablenkungswinkel ν, also gleich $m\nu$, wo m ein Zahlenfaktor ist und das Einspannungsmoment für den Winkel $\nu = 1$ vorstellt. Bei positivem (z. B. rechts gedrehtem) ν tritt ein negatives (also links drehendes) Einspannungsmoment auf. — Für einen an seinen beiden Enden frei drehbar gelagerten Stab ist $r_{1,2} = 0$. Führt man in diesem Fall $Sf - m_1\nu_1$ statt M_1 und $Sf + m_2\nu_2$ statt M_2 in die obigen Gleichungen ein, wobei f die Exzentrizität der Längskraft, also Sf das durch die Längskraft bewirkte Biegungsmoment am Stabende ist, so erhält man durch Auflösung eine Gleichung für ν_1 und eine Gleichung für ν_2. (Zunächst sind zwei Fälle zu unterscheiden: der eine, daß f an beiden Stabenden positiv, der andere, daß f an einem Ende positiv, am andern negativ ist). Die Diskussion der so entstehenden Ausdrücke zeigt: ist die Exzentrizität f gleich Null, so werden mit dem Zähler der erhaltenen Brüche die Neigungswinkel ν gleich Null, der Stab bleibt gerade, es gibt nur ein Gleichgewicht der gleichförmigen Zusammenpressung. Wird gleichzeitig auch der beide Male gleiche Nenner Null, so sind ν_1 und ν_2 unbestimmt, d. h. der Stab knickt aus (im Gedankengang der klassischen Theorie). So erhält man als Knickbedingung

$$0 = (1 + \psi' m_1)(1 + \psi' m_2) - \psi''^2 m_1, m_2.$$

Aus dieser Gleichung können nun die Knicklasten für verschiedene Einspannungsgrade m berechnet werden. Die sogen. Eulerschen Knickfälle, der an einem Ende starr eingespannte und am andern frei drehbare Stab, der an beiden Enden frei drehbare Stab und der an beiden Stabenden starr eingespannte Stab ergeben sich jetzt als Sonderfälle. Bei vollständiger Einspannung ist $m = \infty$, bei freier Drehbarkeit ist $m = 0$. Die Knicklasten des an einem Ende starr eingespannten, am andern ganz freien Stabes können aus der angeschriebenen allgemeinen Form der Gleichungen für ν_1 und ν_2 (die noch den Wert $r_{1,2}$ enthalten) genau so bestimmt werden.

Zimmermann betrachtet in seiner Abhandlung in ähnlicher Weise auch den Einfluß von Walzenlagern auf die Größe der Knicklast, was für die Auswertung von Druckversuchen wichtig ist.

Ueber die Bemessung von Druckstäben. Die frühere preußische Staatsbahnverwaltung — und die gegenwärtige Reichsverkehrsverwaltung bekennt sich zu den gleichen Grundsätzen — gibt als Vorschrift an: »Für Druckspannungen sind die gleichen Zahlen anzuwenden wie für die Spannungen der Zugglieder. Außerdem ist für die Druckglieder nach der Eulerschen Formel eine mindestens fünffache Sicherheit gegen Knicken nachzuweisen.« Im unelastischen Bereich wird heute vielfach nach den empirischen Formeln von v. Tetmajer gerechnet, die z. B. bei Flußeisen für ein Verhältnis $l : i \leq 105$ (freie Stablänge durch Trägheitsradius der Querschnittsfläche) für die Knickspannung den Wert $3{,}11 - 0{,}0114\frac{l}{i}$ t/cm² setzen, während die obigen Bestimmungen für ungefähr $\frac{l}{i} < 65$ einen konstanten Wert vorsehen.

F. Bohny berichtet über ausgeführte Versuche und verteidigt an Hand derselben die oft angefochtenen Vorschriften (Der Bauingenieur 1922, S. 135 bis 141). Bei gegliederten Stäben liegt die Aufgabe so, daß man durch sachgemäße Konstruktion möglichst die Wirkung eines einteiligen Stabes zu schaffen sucht. An Versuchen, die von F. Voß im Materialprüfungsamt Lichterfelde ausgeführt wurden (vergl. Der Bauingenieur 1922, S. 8 bis 11) und an Versuchen des Deutschen Eisenbau-Verbandes zeigt Bohny, daß dies bei zweckmäßiger Ausbildung tatsächlich erreichbar ist. Daß aber nur der sogen. gesunde Sinn des erfahrenen Konstrukteurs allein imstande sei, diese Aufgabe zu lösen und daß weiter der Hamburger Stab vom eingestürzten großen Gasbehälter nur Verwirrung in die Knickfrage gebracht habe, kann nicht zugegeben werden. Die seinerzeit an den Einsturz geknüpften Erörterungen (vergl. die Aufsätze in Der Eisenbau 1911) waren entschieden für das Problem von Bedeutung und haben nur aufklärend gewirkt. Bei der Abhängigkeit der Knicklast gegliederter Stäbe von so vielen Variabeln (Profil, Vergitterung, Bindebleche, Vernietung usw.) ist auch die Ausführung von systematischen Versuchen, die sich nicht auf theoretische Erwägungen stützen, unmöglich und es blieben alle Experimente mehr oder weniger dem Zufall überlassen. Und der »gesunde Sinn« des praktischen Konstrukteurs entsteht eben erst durch wiederholtes richtiges Konstruieren auf Grund theoretischer Erkenntnisse.

Die **Berechnung der Spannungen eines durch eine Längskraft beanspruchten Eisenbetonbalkens,** der in seiner Symmetrieachse von der Kraftwirkung ergriffen ist, wird in Deutschland gewöhnlich so vorgenommen, daß man das Biegungsmoment der Längskraft auf den Schwerpunkt der vorhandenen Beton- und Eisenflächen bezieht. Wenn das Biegungsmoment und die Normalkraft gegeben sind, ist also mit dem Hebelarm der Längskraft auch ihr Abstand vom bekannten Schwerpunkt festgelegt. (Die Berücksichtigung einer durch die Längskraft entstehenden Ausbiegung ist infolge der immer großen Querschnittsabmessungen keinesfalls erforderlich). Bei stärkeren Beanspruchungen (dem sogen. Stadium II b in der Eisenbetonliteratur) ist die Betonzugzone unwirksam und es wird rechnungsmäßig auf der Druckseite eine lineare Spannungsverteilung angenommen. Jetzt ist auch der Schwerpunkt des wirksamen Querschnitts ein anderer. V. Loup berechnet die auftretenden Eisen- und Betonspannungen eines doppelt bewehrten Balkens mit Rechtecksquerschnitt derart, daß er das Biegungsmoment auf diesen noch unbekannten Schwerpunkt bezieht, der erst von der Höhe der sich aus der Rechnung ergebenden Druckzone abhängt

(Le Génie Civil 1922, S. 154 bis 157). Dies kann natürlich nur durch allmähliche Annäherung erfolgen. (Vgl. hierzu auch die Erörterungen zwischen B. Löser und E. Mörsch in Beton u. Eisen 1915 und in Armierter Beton 1919). Loup gibt zur Vereinfachung der Rechnung eine sinnreiche nomographische Darstellung. Es wäre sehr von Vorteil, wenn auch bei uns bei vielen Aufgaben der praktischen Technik die Nomographie die ihr gebührende Beachtung fände.

Bei der **Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke** ist es eine wesentliche Aufgabe, geschickt das Hauptsystem zu finden, um die Ueberzähligen möglichst einfach bestimmen zu können. Doeinck wählt das Hauptsystem mit Hilfe des sogenannten elastischen Pols (Beton und Eisen 1922, S. 33 bis 35 und S. 43 bis 46). Wird irgend ein Punkt eines Stabzugs durch ein Moment beansprucht, so gibt es einen zugeordneten Punkt, den »elastischen Pol«, der keine Lagenänderung erfahren hat. Ebenso kann man auch umgekehrt nach dem Satz von Betti aussagen, daß eine im Pol angreifende Kraft im ursprünglichen Punkt kein Moment, sondern nur eine Verschiebung hervorruft. So erzeugt eine senkrechte Kraft 1 im Pol die senkrechte Komponente der Verschiebung $\delta_{v,v}$, eine wagrechte Kraft 1 die wagrechte Komponente der Verschiebung $\delta_{h,h}$ im Tragwerkpunkt. Für jede durch den Pol gehende Kraft gibt es eine zugeordnete Richtung, in der keine Verschiebung auftritt. Es bestehen nun für den Pol zwei aufeinander senkrechte Achsen, für welche die Werte $\delta_{v,v}$ und $\delta_{h,h}$ zu je einem Maximum werden. Die Verschiebungen für eine Kraft 1 in Richtung dieser sogenannten Hauptachsen und die Winkelverdrehung des Tragwerkspunkts für ein im Pol angreifendes Moment 1 sind »die Grundwerte« des Poles. Durch Lage und Grundwerte ist er eindeutig festgelegt. Die Anwendung ergibt sich in der folgenden Weise.

Bei einem beiderseits eingespannten (dreifach statisch unbestimmten) Bogen wird als (statisch bestimmtes) Hauptsystem der an einem Kämpfer eingespannte Bogen gewählt. Für den anderen Kämpferpunkt wird der Pol bestimmt und im Pol die zur Senkrechten zugeordnete Richtung. Das dort wirkende Moment und die Komponenten der Auflagerkraft in Richtung dieser beiden zugeordneten Achsen sind drei voneinander unabhängige Größen. — Geht eine Kraft durch die Pole zweier Punkte eines Tragwerks, so ruft sie in keinem der beiden Punkte ein Moment hervor. Beim beiderseits eingespannten Bogen kann man also auch so vorgehen, daß man die Pole a', b' der beiden Kämpferpunkte a und b als Kämpfer des Hauptsystems wählt. Und zwar bestimmt man a', indem man den Bogen in b eingespannt, in a frei gelagert annimmt, b' indem man ihn als in a eingespannt und in b frei gelagert betrachtet. Dadurch wird die in die Richtung a', b' fallende Komponente der Auflagerreaktion unabhängig von den Momenten in a und b und somit das Hauptsystem des Bogens der beiderseits eingespannte Balken. Die überzählige Kraft in Richtung a' b' ist von den Ueberzähligen des Hauptsystems unabhängig. — Haben zwei Systeme einen gemeinsamen Pol und für diesen gleiche elastische Grundwerte, so sind sie in bezug auf den Pol und die in diesem zugeordneten Punkte gleichwertig. Man kann sonach, wenn man einen Stab eines Stabwerks betrachtet, an Stelle der andern irgend ein Gebilde setzen, wenn es nur inbezug auf den Anschlußpunkt den gleichen Pol und die gleichen Grundwerte hat. Man wählt z. B. einen an einem Ende eingespannten parabelförmigen Träger, der mit seinen Abmessungen so bestimmt werden kann, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Doeinck untersucht als ausführliches Beispiel für dieses Verfahren den durchlaufenden Bogenträger.

Die **Berechnung eines symmetrischen Stockwerkrahmens** bei horizontalen, in den Knotenpunkten angreifenden Kräften gibt J. Pirlet (Der Bauingenieur 1922, S. 18 bis 20). Bei n Geschossen ist das System $3n$fach stereostatisch unbestimmt, im untersuchten Sonderfall erniedrigt sich die Anzahl der Unbekannten auf n. In der Mitte jedes Querriegels ist das Biegungsmoment gleich null, es kann also diese Stelle als ein Gelenk angesehen werden. Pirlet bildet jetzt das Hauptsystem, indem er in die Fußpunkte der Ständer Gelenke einlegt, womit eine Kette von Dreigelenkbogen entsteht. Ueberzählige sind die an den Fußpunkten der Ständer angreifenden paarweise gleichen Momente in der Anzahl n. Mit diesem Grundsystem gestaltet sich die Rechnung sehr einfach. Die Koeffizienten der Ueberzähligen in den Elastizitätsgleichungen sind leicht bestimmbar, da im Hauptsystem die Momente eines Geschosses nur mit denen des darunter und darüber liegenden Geschosses zu kombinieren sind. Die Elastizitätsgleichungen werden rekurrente Gleichungen mit je drei Unbekannten (nach Art der Gleichungen Clapeyrons beim kontinuierlichen Träger), und können nach bekannten Methoden aufgelöst werden. 186

J. Ratzersdorfer.

KLEINE MITTEILUNGEN

Ein rechnerisch-zeichnerisches Verfahren für parabolische Ausgleichung. Bekannt sind folgende Tatsachen der linearen Ausgleichung von Beobachtungen: Liegen zwischen zwei Veränderlichen x und y n Beobachtungspaare x_ν, y_ν ($\nu = 1, 2 .. n$) vor und wird die eine Veränderliche (x) als fehlerfrei beobachtet angesehen, so ist die die „beste" lineare Ausgleichung darstellende Gerade

$$y = \alpha + \beta x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

der zur y-Achse konjugierte Durchmesser der

Zentralellipse des Beobachtungsbildes. Ihre Parameter sind leicht zu berechnen, die Gerade kann aber auch, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe, nach einer graphostatischen Methode konstruktiv bestimmt werden [1]). Das Maß der Zuverlässigkeit dieser Geraden (vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitstheorie) als Ausdruck des tatsächlich als bestehend angenommenen linearen Gesetzes kann man durch eine Schar von „Fehlerhyperbeln" kennzeichnen [2]).

Für den Fall, daß zwischen den beiden Veränderlichen x, y ein durch die Gleichung

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gekennzeichneter parabolischer Zusammenhang besteht oder angenommen wird, hat H. M. Roeser unter der Voraussetzung, daß die fehlerfrei bestimmte Veränderliche x stets um gleiche Intervalle i fortschreitet, ein einfaches Berechnungsverfahren für die Parameter angegeben, das noch durch eine tabellarische Zusammenstellung der bei den Beobachtungszahlen $n = 5$ bis 31 auftretenden Koeffizienten erleichtert wird. Die Tafeln und die angegebenen Schlußformeln ermöglichen die schnelle Berechnung der Parameter sämtlicher parabolischer Funktionen zweiten Grades und der allgemeinen linearen Funktion [3]). H. Schwerdt hat das entsprechende Verfahren auf die allgemeinste parabolische Funktion dritten Grades ausgedehnt und eine Zahlentafel angegeben, die die für die Berechnung der allgemeinsten Parabel zweiter und dritter Ordnung notwendigen Koeffizienten enthält [1]).

In sehr vielen Fällen der Praxis wird es weniger auf eine genaue zahlenmäßige Berechnung der Parameter des Zusammenhanggesetzes als auf dessen möglichst verläßliche bildliche Darstellung ankommen. Auch wird der anschauliche Vergleich, inwieweit eine Gerade und inwieweit eine Parabel zweiter Ordnung als Bild des Zusammenhanges der beiden Veränderlichen zutrifft, sehr erwünscht sein.

Wird der Schwerpunkt S des Beobachtungsbildes als Ursprung des Koordinatensystems gewählt und schreitet die fehlerfrei bestimmte Veränderliche x um konstante Intervalle i fort, so ist

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma x^3 = 0 \quad . \; . \quad (3)$$

und die zur Bestimmung der Parameter des Gesetzes (2) dienenden Normalgleichungen lauten

$$\left.\begin{array}{lll} a_0 n & + a_2 \Sigma x^2 & = 0 \\ & a_1 \Sigma x^2 & = \Sigma xy \\ a_0 \Sigma x^2 & + a_2 \Sigma x^4 & = \Sigma x^2 y \end{array}\right\} \quad (4).$$

Sie ergeben bei Berücksichtigung der bekannten Summenformeln für Potenzreihen [2])

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = - \dfrac{15}{4n(n^2-4)} \left\{ (n-1)^2 (y_1 + y_n) + (n-3)^2 (y_2 + y_{n-1}) + (n-5)^2 (y_3 + y_{n-2}) + \ldots \right\} \\ a_1 = + \dfrac{6}{n(n^2-1)\,i} \left\{ (n-1)(y_n - y_1) + (n-3)(y_{n-1} - y_2) + (n-5)(y_{n-2} - y_3) + \ldots \right\} \\ a_2 = + \dfrac{45}{n(n^2-1)(n^2-4)\,i^2} \left\{ (n-1)^2 (y_1 + y_n) + (n-3)^2 (y^2 + y_{n+1}) + (n-5)^2 (y_3 + y_{n-2}) + \ldots \right\} \end{array}\right\} \quad (5).$$

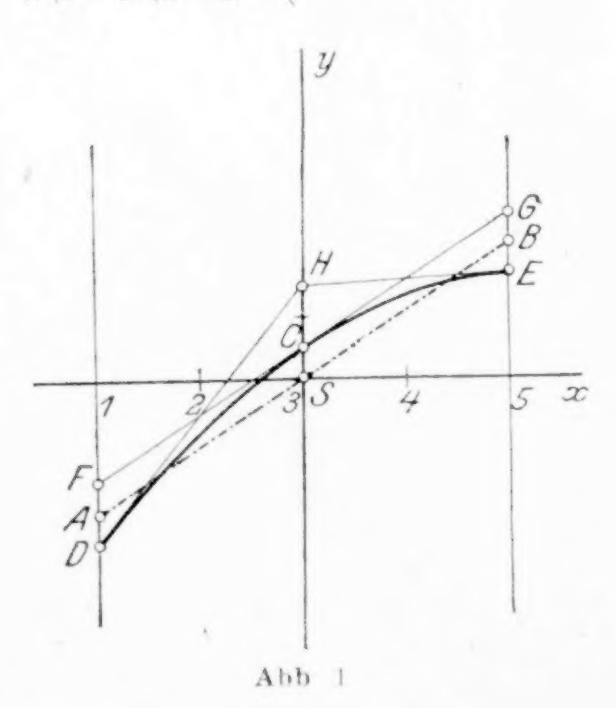


Abb. 1

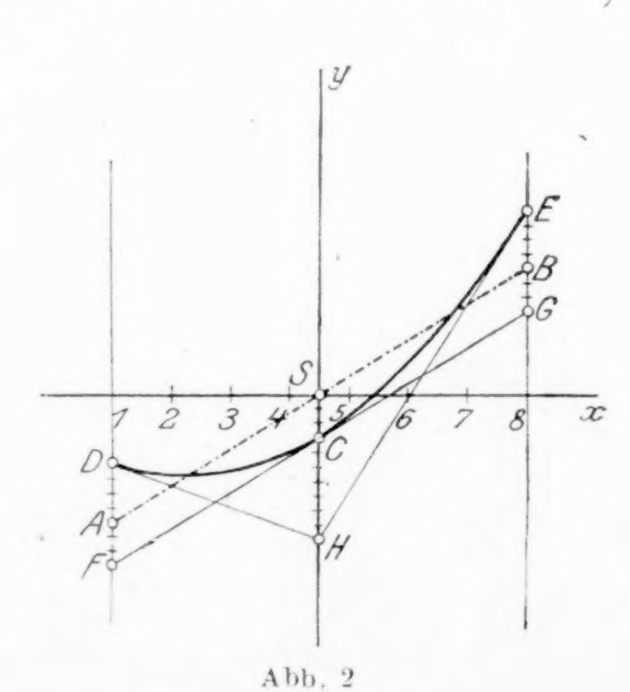


Abb. 2

[1]) A. Basch, Mitteilungen des k. k. Technischen Versuchsamtes Wien, 1. 1912, 2. H. S. 25 bis 30 und 3. H. S. 32 bis 41. Oesterr. Zeitschr. für Vermessungswesen 11, 1913, S. 11 bis 18 und S. 42 bis 46.

[2]) A. Basch, Sitzungsberichte d. Akad. Wien, 123, Abt. IIa, 1914, S. 1659 bis 1678.

[3]) H. M. Roeser, Scientific papers of the Bureau of Standards, Washington, Nr. 388, 1920, S. 363 bis 375.

[1]) H. Schwerdt, Physikal. Zeitschr. 22, 1921, S. 312 bis 315.

[2]) Siehe H. M. Roeser, loc. cit.; H. Schwerdt, loc. cit. Vergl. auch Auerbach und Rothe, Taschenbuch, 3. Jahrg., 94, 96, 64, 1913; O. Th. Bürklen, Formelsammlung, Sammlung Göschen, Nr. 51, 1912, S. 30 und 31. Die daselbst angegebene Summenformel für arithmetische Reihen höherer Ordnung ist auf Potenzreihen ohne weiteres anwendbar.

Hierbei werden die Reihen in den geschlungenen Klammern so lange fortgesetzt, als die veränderlichen Zahlen in den runden Klammern positiv bleiben. Damit ist die gestellte Aufgabe rechnungsmäßig — und zwar sowohl für ungerade als auch für gerade Beobachtungszahlen n — gelöst. Die erste der drei Normalgleichungen (4) gibt schon den Zusammenhang

$$a_2 = -\frac{n}{\Sigma x^2} a_0 = -\frac{a_0}{r_x^2} \quad . \; . \; . \; . \; (6),$$

wobei r_x den durch

$$r_x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{1}{12}(n^2-1)\, i^2 \quad . \; . \; . \; (7)$$

definierten Trägheitsradius des Beobachtungsbildes in bezug auf die y-Achse bedeutet.

Die Gleichung

$$\mathfrak{y} = a_1 x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

gibt gleichzeitig das vorteilhafteste Gesetz des linearen Zusammenhanges der beiden Veränderlichen. Aus der Ableitung der Gleichung (2) nach x

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

ist zu ersehen, daß für $x = 0$, d. h. im Punkte C der Abbildungen, die Tangente FG an die das Gesetz des Zusammenhanges darstellende Parabel DCE zu der das vorteilhafteste lineare Gesetz darstellenden Geraden AB parallel ist. Durch den Parameter $a_0 = \overrightarrow{SC}$ ist der Punkt C der Parabel bereits gegeben. Mit seiner Hilfe und mit Hilfe der Geraden AB können leicht die Punkte, die zu zwei dem Absolutbetrage c nach gleichen Abszissen gehören, und die Tangenten in ihnen gefunden werden. Als c wird am vorteilhaftesten der äußerste Wert der beobachteten Abszissen x gewählt, also

$$c = \frac{1}{2}(n-1)\, i \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Es ist

$$\mathfrak{y}_{\pm c} = \pm a_1 c \;\; (11), \quad y_{\pm c} = a_0 \pm a_1 c + a_2 c^2 \;\; (12).$$

Daher ist

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EB} = \mathfrak{y}_{\pm c} - y_{\pm c} = -(a_0 + a_2 c^2)$$
$$= \left(\frac{c^2}{r_x^2} - 1\right) a_0 = \frac{n-2}{n+1} \cdot 2a_0 \quad . \; . \; (13)$$

und liegt, da n die ganzzahligen Werte von drei (bestimmter Grenzfall) bis Unendlich annehmen kann, im Gebiete von $\frac{1}{2} a_0$ bis $2\,a_0$. Im Grenzfall $n = \infty$ wird der Ausdruck (13) zu $2a_0$, d. h. Parabel- und Linear-Approximation geben zwischen den Endordinaten die Fläche Null über der x-Achse.

Der Schnittpunkt der im Punkte x, y an die Parabel (2) gelegten Tangente mit der y-Achse besitzt die Ordinate

$$\eta = y - x\frac{dy}{dx} = a_0 - a_2 x^2 = \left(\frac{x^2}{r_x^2} + 1\right) a_0 \quad (14),$$

also für $x = \pm c$

$$\eta_{\pm c} = \overrightarrow{SH} = a_0 - a_2 x^2 = \left(\frac{c^2}{r_x^2} + 1\right) a_0$$
$$= \frac{2n-1}{n+1} \cdot 2a_0 \quad . \; . \; . \; . \; (15),$$

schwankt daher zwischen $\frac{5}{2} a_0$ und $4\,a_0$.

Schließlich ist

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CH} = \frac{c^2}{r_x^2} a_0 = \frac{3(n-1)}{n+1} a_0 \quad (16)$$

und schwankt je nach dem Werte von n zwischen $\frac{3}{2} a_0$ und $3\,a_0$. Somit schwanken alle drei Strecken um den gleichen Betrag $\frac{3}{2} a_0$.

Der Abb. 1 ist der Fall von $n = 5$ Beobachtungen zugrunde gelegt (das ist die einzige endliche Beobachtungszahl, bei der die drei Strecken zu a_0 in ganzzahligem Verhältnis stehen). Es ist

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EB} = a_0, \qquad \overrightarrow{SH} = 3\,a_0,$$
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CH} = 2\,a_0.$$

Die Abb. 2 entspricht der Beobachtungszahl $n = 8$. Hier ist

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EB} = \frac{4}{3} a_0, \qquad \overrightarrow{SH} = \frac{10}{3} a_0.$$
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CH} = \frac{7}{3} a_0.$$

Ist a_0 positiv, so ist a_2 negativ, die Parabel konkav nach unten (Abb. 1); ist a_0 negativ, so ist a_2 positiv, die Parabel konkav nach oben (Abb. 2).

Zusammenfassung.

Hat man die das vorteilhafteste lineare Gesetz veranschaulichende Gerade gezeichnet und die Ordinate des Parabelpunktes für die Abszisse des Schwerpunktes des Beobachtungsbildes gerechnet (das ist, wenn dieser Schwerpunkt als Ursprung des Koordinatensystems gewählt wurde, der Parameter a_0 der Parabel), so kann man leicht die zwei äußersten Punkte der Parabel mit ihren Tangenten gewinnen und daraus — soweit nötig — beliebige Tangenten der Parabel samt ihren Berührungspunkten nach bekannten geometrischen Methoden erhalten. 193

Wien, im Mai 1922. A. Basch.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. EMANUEL **CZUBER,** o. ö. Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Zweiter Band: Mathematische Statistik, Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. Dritte durchgesehene Aufl. Mit 34 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig, Berlin 1921. X + 470 S.

Die vorliegende dritte Auflage des zweiten Bandes ist ein anastatischer Neudruck der zweiten Auflage. Damit liegt die dritte Auflage des ganzen, vielfach bekannten und geschätzten Gesamtwerkes abgeschlossen vor. Auf den sachlichen Inhalt des Buches einzugehen wird hoffentlich bald Gelegenheit sein, sobald der Verfasser in die Lage versetzt ist, bei einer drucktechnisch freien Neuauflage seines Werkes den inzwischen eingetretenen Neuerungen und Veränderungen auf den behandelten Gebieten Rechnung zu tragen. Mises. 211

NACHRICHTEN

Gründung einer deutschen Ingenieurwissenschaftlichen Vereinigung. Im Verfolg der Bestrebungen, von denen an dieser Stelle wiederholt die Rede war[1]), ist anschließend an den Leipziger Naturforschertag am 21. September d. Js. in einer Versammlung von Vertretern der Ingenieurwissenschaften, der Mechanik und der angewandten Mathematik eine Gesellschaft gegründet worden, deren Aufgabe die Pflege und Förderung der Forschung auf allen den Ingenieurwissenschaften zuzuzählenden Teilgebieten der Mathematik und Physik ist. Der Verlauf der, wie wir hoffen, für die Weiterentwicklung der deutschen Technik nicht bedeutungslosen Sitzung war folgender. Herr Prandtl-Göttingen, der zum Vorsitzenden gewählt worden war, legte in wenigen Worten die unmittelbare Veranlassung der Neugründung dar. Es sei notwendig, zu der jährlichen Naturforscherversammlung für die Vorbereitung und Durchführung von Vorträgen auf den bezeichneten Grenzgebieten eine feste Organisation zu schaffen, die mit der Leitung der Naturforschertage und den nahestehenden Gesellschaften über die Tagesordnung usf. verhandeln könne. Dabei bestehe nicht die Absicht, durch Bildung einer neuen Abteilung eine weitere Zersplitterung herbeizuführen, sondern es solle versucht werden, wie bisher, im Rahmen der Abteilungen 1 und 3 (Mathematik bezw. Technische Physik) zu verbleiben. Ueber diesen nächsten Zweck hinaus würde eine Vereinigung zur Förderung der theoretischen Ingenieurwissenschaften eine Lücke ausfüllen, die seit mehreren Jahren von einer großen Zahl wissenschaftlich tätiger Ingenieure lebhaft empfunden wird. Nachdem dann die Herren Scheffers, Hamel und Rothe-Charlottenburg mannigfachen Bedenken gegen die beabsichtigte Neugründung Ausdruck gegeben hatten, wurde auf Antrag von v. Mises-Berlin die Gründung der Gesellschaft mit Stimmenmehrheit beschlossen. Ein weiterer Antrag, Beitrittserklärungen sofort entgegenzunehmen und von jedem Beitretenden einen vorläufigen Gründungsbeitrag von M 50 einzuheben, erledigte sich dadurch, daß 26 von den Anwesenden sich in eine Beitrittsliste eintrugen und den Beitrag leisteten. Lebhafte Aussprache knüpfte sich an den Antrag, die neue Vereinigung in ein organisches enges Verhältnis zum V. d. I. zu bringen (etwa wie die Gesellschaft für Metallkunde), um auf diese Weise die Geschäftsführung zu erleichtern und zu vereinfachen. Entgegen Einwendungen der Herren Hamel und Rothe wurde mit Stimmenmehrheit in diesem Sinne beschlossen. Zur Ausarbeitung eines Satzungsentwurfes und zur Vorbereitung der nächsten Jahresversammlung wurde ein vorläufiger Ausschuß eingesetzt, bestehend aus den Herren Prandtl-Göttingen als Vorsitzender, v. Mises-Berlin als Geschäftsführer, sowie den Herren Emde-Stuttgart, Gehler-Dresden, Hamel-Berlin, Knoblauch-München, Reissner-Berlin, Trefftz-Dresden. Auch über den endgültigen Namen, den die Vereinigung führen wird, soll der Ausschuß zugleich mit dem Satzungsentwurfe einen Vorschlag auf der nächstjährigen Tagung vorlegen.

[1]) Bd. 1, 1921, S. 420; Bd. 2, 1922, S. 322.

Leipziger Naturforschertag September 1922. Die Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik können auch in diesem Jahre auf eine erfolgreiche Tagung, deren wissenschaftlicher Verlauf befriedigend war, zurückblicken. Die Reihe der Fachsitzungen wurde eröffnet durch eine Sitzung der Abteilung 3 (Technische Physik) am 19. September nachmittags. Der Vorsitzende, Herr Prandtl-Göttingen, wies in einer kurzen Ansprache darauf hin, daß vom kommenden Jahr an die Vertreter der ingenieurwissenschaftlich gerichteten Fächer sich in einer besonderen Organisation zusammenschließen werden, dabei aber die bisherige enge Fühlung mit den bestehenden Abteilungen 1 und 3 des Naturforschertages nicht aufgeben wollen. Hr. Berndt-Berlin berichtet über die z. T. von ihm ausgearbeiteten exakten Methoden zur Nachmessung von Schraubengewinden. Die besten Messungen beruhen auf optischen Verfahren, wobei ein von Zeiß hergestelltes Instrument den Meßfehler auf 10 μ herabzusetzen gestattet. Größere Genauigkeit ist nicht zu erreichen, da die Parallelität der Flanken des Gewindes nicht besser ist. Hr. Zeißig-Darmstadt führt ein Zeichengerät vor, das ermöglicht, zwei harmonische Schwingungen beliebiger Amplitude und Frequenz zusammenzusetzen. Hr. Schieferstein-Berlin zeigt an mehreren Beispielen, z. T. unter Vorführung von Apparaten, wie man durch Ausnutzung prinzipieller Eigenschaften der Schwingungsvorgänge den Nutzeffekt hin- und hergehender Massen verbessern kann. Unter anderm wird eine zweipendelige Uhr vorgeführt, bei der das zweite Pendel zur Regulierung des ersten dient und dadurch eine außerordentlich hohe Gleichmäßigkeit des Ganges herbeiführt. Hr. Schmaltz-Offenbach a. M. führt einen handlichen Apparat vor, der dazu bestimmt ist, periodische Erschütterungen oder Schwingungen an Maschinenteilen u. dergl. aufzunehmen und zu registrieren. Der Apparat besteht aus einem Mikrophon, einem Saitengalvanometer und einer photographischen Kamera. Hr. Wolff-Wien berichtet über die von Griffith herrührende Theorie der Zerreißfestigkeit, die einen Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung eines Körpers und seiner Zerreißgrenze herstellt. Der Vortrag, der eine neue Begründung und Erweiterung der Griffithschen Theorie enthält, wird in dieser Zeitschrift demnächst erscheinen. Hr. Schmidt-

München berichtet über Theorie und Versuche betr. Fundamentschwingungen von Maschinen. Die dem Vortrag zugrundeliegende Forschungsarbeit wird in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden. Hr. Hundhausen-Dresden gibt an Hand zahlreicher Modelle und zeichnerischer Darstellungen eine Uebersicht über die von Reulaux vor mehreren Jahrzehnten geschaffene Zwanglauflehre, deren weiteren Ausbau er sich zur Aufgabe gemacht hat.

Sitzung der Abteilung 1 am 21. September vormittags. Der Vorsitzende, Hr. v. Mises-Berlin, begrüßt die auf besondere Einladung des vorbereitenden Ausschusses für angewandte Mathematik erschienenen Gäste und dankt der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für das der »angewandten Richtung« bisher bewiesene Entgegenkommen, das nach der bevorstehenden Gründung der »Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik« in ein dauernd-freundschaftliches Verhältnis übergehen soll. Hr. Runge-Göttingen eröffnet die Reihe der Vorträge mit einer Mitteilung über ein von ihm gefundenes zeichnerisches Verfahren, das die Bestimmung der Bahnkonstanten von Planeten in einfacher Weise ermöglicht. Das Verfahren beruht auf der Abbildung von Raumvektoren auf die Massenpunkte der Ebene (baryzentrischer Kalkül) und liefert die gesuchten Größen durch einen der Nomographie verwandten Vorgang, wobei sich die Genauigkeit durch Verfeinerung des Maßstabes beliebig steigern läßt. In der Aussprache gibt Hr. Runge auf Wunsch von Hrn. Bauschinger-Leipzig und Oppenheim-Wien nähere Auskunft über die praktisch erzielbaren Genauigkeitsgrenzen. Hr. Reißner-Berlin entwickelt in einem Vortrag die Grundgleichungen dünner elastischer Schalen, macht Angaben über deren Integration und zeigt, wie sich auf diesem Wege praktisch wichtige Probleme der Baumechanik lösen lassen. Der Vortrag soll in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden. Großem Interesse begegnet auch der Vortrag von Hrn. Nádai-Göttingen über die exakte Theorie elastischer Platten und ihre Bestätigung durch Versuche. Der Vortragende hat in mehreren eigenen Arbeiten die mathematische Theorie auf diesem Gebiete in mannigfachen Punkten ergänzt und berichtet jetzt zugleich über Versuche mit Glas- und Stahlblechplatten, die er in der Göttinger Versuchsanstalt durchgeführt hat. Der Vortrag erscheint an anderer Stelle dieses Heftes in erweiterter Form.

In der Fortsetzung der Sitzung unter Vorsitz von Hrn. Reißner spricht zunächst Hr. Hopf-Aachen über Ergebnisse von Versuchen im aerodynamischen Laboratorium Aachen, die den Begriff der Rauhigkeit von hydraulischen Leitungen zu klären bestimmt waren. Es hat sich herausgestellt, daß die Charakterisierung der Wandrauhigkeit durch eine einzige Zahl (relative Rauhigkeit nach v. Mises) nur als erste Annäherung gelten kann. Im übrigen scheinen die Versuche zu ergeben, daß die Widerstandszahl, entgegen der heute vielfach gemachten Annahme eines Potenzgesetzes, bei großen Geschwindigkeiten einem konstanten Grenzwert zustrebt. Hr. Waelsch-Brünn legt in anschaulicher Weise die letzten Resultate langjähriger Forschungen auf dem Gebiete der höheren Vektoranalysis dar. Er zeigt, wie man durch genügend weitgehende Abstraktion und Herausschälen des wahren Kerns aller Operationen der geometrischen Analyse schließlich zu einem axiomatisch aufgebauten System von größter Einfachheit gelangen kann, das er die »Analyse der reinen Form« nennt. Ein gewisser Bestandteil dieser Untersuchungen wird demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen.

Sitzung der Abteilung 1 am 21. September 1922 nachmittags, unter Vorsitz von Hrn. Blumenthal-Aachen. Hr. Trefftz-Dresden berichtet über einen schönen Fortschritt, den er in der Anwendung der Integralgleichungstheorie auf die für Schwingungsprobleme wichtige Frage der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen erzielt hat. Danach ist es möglich, die Entwicklungsbedingungen gegenüber den bisherigen so einzuschränken, daß ihr physikalischer Sinn unmittelbar einleuchtet. Hr. Sternberg-Heidelberg macht eine kurze Mitteilung über die Tragweite des Verfahrens asymptotischer Integration auf das von Hrn. Trefftz behandelte Problem der Entwicklung willkürlicher Funktionen. Großes Interesse findet der Vortrag von Hrn. Tietze-Erlangen über Mathematisches zur Vererbungslehre. Der Vortragende zeigt, wie sich mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln aus dem bekannten Mendelschen Gesetz der Vererbung exakte Schlüsse auf die Zusammensetzung einer Population nach beliebig viel Generationen ziehen lassen. Der Vortrag wird in dieser Zeitschrift demnächst erscheinen.

Prüfungsordnung für die Mathematiklehrer an höheren Schulen. In der ersten Hauptversammlung des mathematischen Reichsverbandes, die im Vorjahre in Jena stattfand, war auf Antrag von Hrn. Bieberbach-Berlin einstimmig beschlossen worden, innerhalb des Reichsverbandes einen Entwurf für eine neue Prüfungsordnung für die Lehramtsprüfung der Mathematik auszuarbeiten. Zu diesem Zweck wurde ein Ausschuß eingesetzt, dem der Vorsitzende des Reichsverbandes, Hr. Hamel, als Vorsitzender, ferner die Herren Bieberbach, v. Mises, Rothe und Zacharias angehörten. Der Ausschuß hat im Laufe des Jahres vielfach getagt und seine Entwürfe wiederholt einem größeren Kreis von Fachleuten zur Beurteilung und Stellungnahme vorgelegt. Völlige Einigkeit wurde hinsichtlich des Hauptgedankens des neuen Entwurfs erzielt. Dieser besteht darin, daß in Hinkunft nur eine einzige Fakultas

für Mathematik schlechthin bestehen soll, so daß das bisherige besondere Zusatzfach »angewandte Mathematik« wegfällt. Dafür soll die Lehrbefähigung der Mathematik als Hauptfach auf zweierlei verschiedenen Ausbildungs- und Prüfungswegen erworben werden können, von denen der eine der reinen Mathematik, der andere der angewandten Mathematik angehört. Nach einem bestimmten, für beide Richtungen gemeinsamen Minimum an Forderungen gabelt sich die Prüfung je nach Wunsch des Kandidaten nach der reinen oder angewandten Seite. Im letzteren Fall wird Beherrschung der für die Anwendung wichtigsten Teile der Analysis, insbesondere ihrer rechnerischen, zeichnerischen und instrumentellen Verfahren gefordert, Kenntnis der darstellenden Geometrie, der Mechanik (einschließlich graphischer Statik und Kinematik), der Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung; tiefer eindringende Studien auf mindestens einem Anwendungsgebiet, so daß der Kandidat imstande ist, eine angemessene Aufgabe aus diesem Gebiet selbständig zu bearbeiten; endlich Vorlage bescheinigter Zeichnungen und Uebungsblätter aus der Studienzeit.

Heftige Meinungsverschiedenheit bestand innerhalb des Ausschusses hinsichtlich eines Zusatzes zu diesen Forderungen, der von einem Teil der Ausschußmitglieder gewünscht wurde. Der in der Sitzung des Reichsverbandes in Leipzig am 22. September von Hrn. Hamel vertretene Standpunkt der Mehrheit des Ausschusses geht dahin, daß von dem Kandidaten der Mathematik, der seine Prüfung nach der angewandten Richtung zu erstrecken wünscht, außerdem noch der Nachweis einer praktischen Betätigung gefordert wird, beispielsweise bei geodätischen Uebungen im Gelände, in einem elektrotechnischen oder Maschinenlaboratorium od. dergl. Während eine derartige Forderung ursprünglich von fast allen Universitätslehrern als nicht zur Sache gehörig völlig abgelehnt wurde, vertrat in der genannten Sitzung Hr. v. Mises im Namen der Minderheit des vom Reichsverband eingesetzten Ausschusses einen Kompromißvorschlag. Nach diesem soll von jedem Kandidaten der angewandten Richtung verlangt werden, daß er entweder zugleich die Lehrbefähigung für Physik besitzt (bei deren Erlangung er ein genügendes Ausmaß physikalisch-technischer Bildung nachweisen soll) oder den Nachweis praktischer Betätigung auf einem nicht-physikalischen Anwendungsgebiet, z. B. bei geodätischen Uebungen im Gelände, erbringt. Dieser Vorschlag soll vor allem dem Gesichtspunkt Rechnung tragen, daß Betätigung in einem physikalisch-technischen Praktikum keinen Bildungswert für einen Mathematiker besitzt, der nicht zugleich physikalischen Studien obliegt; durch eine sprunghafte Verknüpfung mathematischer Vorlesungen mit praktischer Tätigkeit in einem Maschinenlaboratorium oder dergl. würde lediglich ein gewisser Dilettantismus großgezogen. Nach Erstattung der beiden Referate sprach Hr. Schoenflies-Frankfurt a/M. als Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Namen dieser Vereinigung sich auf das Entschiedenste für den Kompromißvorschlag aus. Hr. Rothe-Berlin meinte, daß die Gegensätze nicht so schwerwiegende seien, daß ein Ausgleich innerhalb des Ausschusses nicht noch erhofft werden könnte. Angenommen wurde ein von Hrn. Schlesinger-Gießen gestellter Vertagungsantrag, mit dem zugleich der Reichsverband ersucht wird, vor Abschluß seiner Arbeiten mit den nichtpreußischen Hochschulen und Prüfungsämtern in Fühlung zu treten.

S. Finsterwalder. Am 4. Oktober ds. Js. hat Geheimrat S. Finsterwalder, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule München, sein 60. Lebensjahr vollendet. Bei dem bedeutenden Einfluß, den Finsterwalder auf die Entwicklung verschiedener Zweige der angewandten Mathematik genommen hat, benutzen wir gern den Anlaß, seiner Arbeiten und seiner Verdienste zu gedenken. Unter den Mathematikern unseres Zeitalters ist Finsterwalder einer der ideenreichsten Forscher und eine charakteristische wissenschaftliche Persönlichkeit. Mathematiker und Naturforscher zugleich, findet er in der Beobachtung der Natur unerschöpfliche Anregungen zu mathematischen Fragestellungen und physikalisch-technischen Problemen, die er mit gleicher Meisterschaft bezwingt. Aus dieser glücklichen und seltenen Verbindung verschiedener Begabungen sind die Arbeitsgebiete entstanden, die er sich geschaffen hat, und auf denen er Meister und Lehrer geworden ist, während er selbst keiner Schule und keiner Richtung angehört als seiner eigenen.

Unter den Teilen der angewandten Mathematik, die Finsterwalder gefördert hat, steht die Photogrammetrie oben an; um sie gruppiert sich die Mehrzahl seiner sonstigen Studien. Zur Beschäftigung mit ihr führte den jungen Naturfreund um die Mitte der achziger Jahre die damals auflebende wissenschaftliche Erforschung der Alpen und des sie bedeckenden ewigen Eises. An zahlreichen Aufnahmen alpiner Gletscher hat Finsterwalder die Methoden der Hochgebirgsphotogrammetrie nach allen Seiten hin entwickelt. Von der Konstruktion zweckentsprechender Phototheodolite bis zur Darstellung der Geländeformen in der Karte gibt es keine Einzelheit der Ausführung, die er nicht beherrscht und die er nicht mindestens durch eigene Gedanken bereichert hätte. Besondere Liebe hat er von jeher der Feldarbeit zugewendet, und seit fast 40 Jahren weiht er ihr in unverminderter Leistungsfähigkeit alljährlich einen beträchtlichen Teil seiner Ferien. — Neben die Hochgebirgsphotogrammetrie trat bald die Ballonphotogrammetrie, die Vorläuferin der heutigen Fliegerphotogrammetrie, und auch hier beschäftigte er sich in praktischer und theoretischer Arbeit mit Aufnahme und Ausarbeitung. Beide Zweige

der Photogrammetrie haben die Schwierigkeit gemeinsam, daß die vollständige Orientierung der Aufnahmen höchstens nach umfangreichen Vorarbeiten erreichbar ist. Der Überwindung dieser Schwierigkeit dient eine Anzahl von Arbeiten über flüchtige Photogrammetrie, Ortsbestimmung von Ballonaufnahmen, das Rückwärtseinschneiden im Raum. Daneben finden theoretische Untersuchungen statt über die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Auch die prinzipiell einfachere Photogrammetrie mit vollständiger Orientierung wird nicht vernachlässigt, Feldarbeit und Ausarbeitung werden verfeinert und geprüft; die modernen stereophotogrammetrischen und autographischen Methoden, die neuerdings an der Technischen Hochschule München durch einen eigenen Lehrauftrag vertreten sind, in jeder Weise gefördert.

Mit den Gletscheraufnahmen eng verbunden ist das Studium der Gletscher selbst. Hier zeigt sich Finsterwalder als Physiker und Geograph. Eine Reihe von Untersuchungen hat das Studium der stationären Bewegung des Eises, besonders ihrer Vertikalkomponente zum Ziel; die wesentliche Frage aber, der sich alle anderen unterordnen, ist die nach der periodischen Bewegung, den Gletscherschwankungen. Ihr sind die jahrzehntelangen Vermessungen gewidmet. Die Untersuchungen über den Vernagtferner gehören zu den klassischen Werken der Naturwissenschaft. Eine mathematische Theorie der Gletscherschwankungen erklärt mit Glück alle wesentlichen Erscheinungen.

Die zu exakten photogrammetrischen Arbeiten notwendigen geodätischen Grundlagen bringen Finsterwalder in Fühlung mit dem Vermessungswesen, besonders der höheren Geodäsie, der er sich mit der gewohnten Gründlichkeit in Theorie und Praxis hingibt. Eine Reihe von Arbeiten über den Zusammenschluß der trigonometrischen Netze der deutschen Staaten sind eine Frucht dieser Studien. Seit Jahren schätzt das bayrische Landesvermessungsamt seinen Rat und seine Hilfe; es hat sie nicht nur zur Vorbereitung der beabsichtigten Neutriangulation Bayerns in Anspruch genommen, sondern auch während des Krieges zur Ausarbeitung feldmäßiger Methoden der Luftphotogrammetrie. Die Konstruktion eines Apparates zur optisch mechanischen Umformung von Fliegerbildern in die Karte auf Grund des Scheimpflugschen Prinzips verdient besondere Erwähnung.

Andere Arbeiten Finsterwalders liegen auf dem Gebiet der geometrischen Optik. Sie beschäftigen sich meist mit den von optischen Systemen größerer Öffnung erzeugten Bildern und mit der Abweichung von der punktförmigen Abbildung, Unschärfe, Verzerrung, Helligkeitsverteilung des Lichtflecks. Diese Arbeiten fallen in das erste Jahrzehnt seiner Forschertätigkeit und zeichnen sich wie seine sämtlichen Arbeiten durch rechnerisch und zeichnerisch genau durchgeführte, greifbare Ergebnisse aus. Später hat seine tiefgehende Kenntnis der Optik bei der Konstruktion von Apparaten wiederholt ihren Einfluß gezeigt.

Es ist nicht möglich, hier alle die Gebiete aufzuzählen, auf denen Finsterwalders mathematischer Geist und seine Erfindungsgabe Leistungen vollbracht haben. Die Aeronautik führt ihn zur Aerodynamik; seine Tätigkeit als Freiballonführer zu den Problemen der Kugelteilung; die geographischen Arbeiten zu Untersuchungen über die mathematischen Konstanten topographischer Flächen. Auf analytischem Gebiet erfindet er ein Verfahren der harmonischen Analyse. Die Probleme, die nicht praktischen Zwecken dienen, wie das der Flächenteilung mit kürzesten Grenzen, sind bei der Untersuchung praktischer Fragen entstanden. In den geometrischen Untersuchungen fehlt nie die Beziehung zur Mechanik oder ein Ausblick auf andere Anwendungsmöglichkeiten, auf die Aesthetik geometrischer Formen und die Beziehungen zu Kunst und Kunsthandwerk.

Es soll auch nicht versucht werden, hier ein Bild von Finsterwalders bisherigem Lebensgang zu entwerfen; das wenige, was gesagt wurde, genügt um die Geschlossenheit seiner Persönlichkeit zu zeigen: die Forscherarbeit auf dem weiten und vielverzweigten Gebiet der angewandten Mathematik ist ihm nicht Beruf, sie ist der geistige Inhalt seines Lebens. — Seine Lehrtätigkeit, die ihm neben der Ausbildung der Studierenden der Ingenieurwissenschaften in Mathematik und Darstellender Geometrie, in höheren Vorlesungen für Ingenieure und Mathematiker Gelegenheit zum Vortrag über seine eigenen Forschungsgebiete gibt, zeichnet sich durch lebendige Verbindung von Theorie und Praxis aus. Kein Wunder, daß ein so gedankenreicher und lebenspendender Geist großen Einfluß auf seine Umgebung ausübt; daß er mit verwandten Naturen anderer Fachrichtungen jahrzehntelang zu gemeinsamen Ziel zusammenarbeitet; daß er auf jedem seiner Lieblingsgebiete einen Kreis von Schülern um sich gesammelt und einen Einfluß auf die Entwicklung der Wissenschaft gewonnen hat, der weit über seinen unmittelbaren Wirkungskreis hinausgeht und wenigstens in der Vorkriegszeit nicht auf Deutschland beschränkt war. Heute, da die Photogrammetrie nach jahrzehntelangen Schwierigkeiten sich durchgesetzt hat und in Wissenschaft und Technik, in Vermessungswesen und Astronomie den ihr gebührenden Platz einnimmt, sieht er in Deutschland in einer Zeit vielfachen Niederganges die Früchte seiner Arbeit reifen.

Lagally. 221

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Massenanziehung in einem Kreisringkörper. Dieses Thema behandelt in Bd. 1, 1921, S. 487 bis 489 ein Aufsatz des Herrn L. Hotopp, der nicht unwidersprochen bleiben kann. Herr Hotopp integriert dort das Integral

$$\eta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta - n}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta}^{\,3}}\, d\vartheta$$

folgendermaßen angenähert: er teilt das Intervall 0 bis 2π in 12 gleiche Stücke $\frac{\pi}{6}$ und ersetzt das Integral durch die Summe

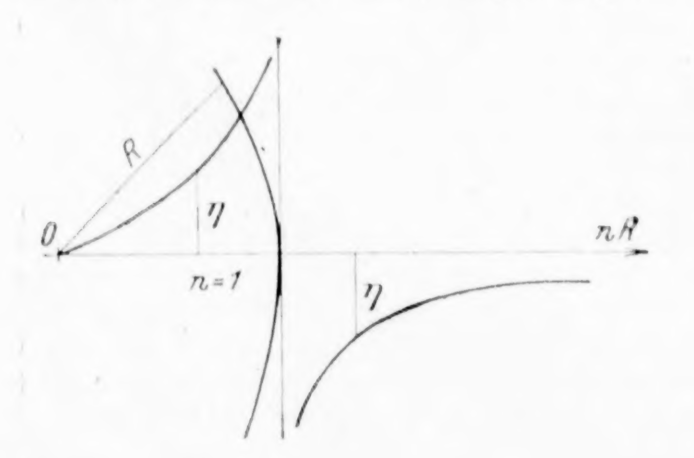
$$\frac{\pi}{6} \sum \frac{\cos\vartheta_i - n}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta_i}^{\,3}}$$

mit

$$\vartheta_i = \frac{\pi}{12},\ \frac{3\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12} \text{ usw.}$$

Dieses Verfahren mag für Werte von n befriedigen, die von $n=1$ hinreichend entfernt sind, ist aber sicher unzulässig, wenn n dicht bei 1 liegt, weil dort der Integrand sehr groß wird, für $n \to 1$ sogar gegen ∞ geht. In diesem Falle versagt bekanntlich das Verfahren.

Tatsächlich sind auch gerade die interessanten Resultate des Herrn Hotopp falsch. In Wahrheit gibt es bei Fig. 3 weder das Maximum, noch die Nullstelle bei B, noch das Minimum. Vielmehr geht die Kurve bei Annäherung an $n=1$ beiderseits gegen ∞ und sieht also so aus, wie die untenstehende Abbildung[1]) zeigt:



Es ist ja

$$\eta = \frac{\partial}{\partial n} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta}}.$$

Nun wächst aber bekanntlich das elliptische Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\vartheta}}$$

mit $n \to 1$ beiderseits gegen $+\infty$, was ja schon daraus hervorgeht, daß

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{d\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} = \infty$$

ist.

Mithin muß η die von mir behauptete Gestalt haben. Es ist ja auch ein bekannter Satz der Potentialtheorie, daß bei Annäherung an eine mit Masse belegte Linie sowohl Potential wie Kraft unendlich groß werden.

Die weiteren Schlüsse des Herrn Hotopp sind natürlich entsprechend unrichtig. 167

Hamel.

[1]) In der Abbildung ist die Bezeichnung $n=1$ etwas mehr nach rechts gerückt zu denken.

Erwiderung. Den von Hrn. Professor G. Hamel zu meiner Arbeit über »Massenanziehung in einem Kreisringträger« erhobenen mathematischen Einwand, daß die auf dem Wege endlicher Teilung gewonnene angenäherte geometrische Entwicklung der in Gl. (5) meiner Arbeit enthaltenen Integralfunktion bei stetiger Verteilung der Massen eine andere Form und insbesondere die betreffende Linie unter Fortfall der Maximal- und Minimalpunkte im Abstande $n=1$ von der Ringmitte asymptotische Annäherung an eine den Elementarring tangierende Gerade zeigt, muß ich gelten lassen. Schade nur, daß die Mathematik einen anderweit gangbaren Weg zur wirklichen einfachen Auswertung jener Funktion über die Erkenntnis des bezeichneten asymptotischen Verhaltens hinaus nicht bietet. Die Anziehung des Elementarringes auf jeden seiner eigenen Massenpunkte, d. i. seine Festigkeit, soweit diese aus der Massenanziehung entspringt, würde sich dabei nur in endlicher Größe ergeben können.

Meine Beschäftigung mit dem mir sonst ferner liegenden Gegenstande geschah übrigens nur aus bestimmtem Anlaß und in erster Linie mit dem Ziele, den Gleichgewichtszustand eines Massenpunktes im Zentrum eines Kreisringkörpers lediglich unter der Wirkung der Massenanziehung festzustellen. In dieser Beziehung wird das Ergebnis, die Feststellung des labilen Gleichgewichtszustandes, durch den Einwand des Herrn G. Hamel nicht berührt.

Hotopp. 167a

(Redaktionsschluß 31. Oktober 1922.)

Verantwortlich für die Schriftleitung: Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.